Исходные периодические орбиты (типа Шварцшильда) были получены при помощи численного интегрирования уравнений движения. Таким путем гораздо легче найти периодические решения с нужной точностью, нежели аналитическими методами, развитыми Пуанкаре и Шварцшильдом. Для интервалов времени, не превышающих нескольких десятков лет, оказалось возможным без существенного ущерба для точности заменить в уравнениях в вариациях периодические коэффициенты их средними значениями. В этом случае нахождение вариаций ξ_s, определяемых системой линейных уравнений с постоянными коэффициентами, выполняется совсем просто.

В качестве основы для построения точных теорий движения планет периодические решения задачи трех тел использованы в работе В. А. Брумберга [1966].

§ 17. Финальные движения в задаче трех тел

Классификация движений, имеющих место в задаче трех тел, представляет весьма сложную проблему, изучение которой еще только едва начинается. Некоторая законченность была достигнута лишь в отношении так называемых **финальных движений**, т. е. тех предельных видов, к которым движения стремятся при $t \to +\infty$ или $t \to -\infty$.

Работы Шази (J. Chazy), создавшего в 1922—1932 гг. основы теории финальных движений, показали, что каждое такое движение (продолжающееся до бесконечности, иначе говоря, не заканчивающееся тройным соударением) необходимо принадлежит к одному из следующих семи видов.

I. *Движения гиперболические,* в которых все три расстояния между телами становятся бесконечно большими величинами первого порядка относительно времени.

В этом случае каждая из шести координат, определяющих относительное положение трех тел, может быть представлена (для достаточно больших значений $|t|$) в форме

$$ct + c' \ln t + c_0 + P\left(\frac{1}{t}, \frac{\ln t}{t}\right), \tag{17.1}$$

где c, c', c_0 — постоянные величины, а через $P(x, y)$ обозначена функция, голоморфная в точке $(0, 0)$.

II. *Движения гиперболо-параболические,* в которых два из расстояний между телами суть бесконечно большие величины первого порядка, а третье расстояние есть величина порядка 2/3.

В этом случае координаты одного из тел относительно одного из двух других представляются рядами вида

$$c_1 t^{1/3} + c_2 t^{2/3} + t^{2/3} P\left(\frac{1}{t^{1/3}}, \frac{\ln t}{t}\right), \tag{17.2}$$

тогда как координаты третьего тела относительно центра инерции первых двух представляются выражениями вида (17.1).

III. *Движения гиперболо-эллиптические,* в которых два из расстояний между телами суть бесконечно большие величины первого порядка, тогда как третье расстояние остается ограниченным.

IV. *Движения параболо-параболические,* в которых все три расстояния при достаточно больших значениях $|t|$ имеют вид (17.2).

V. *Движения параболо-эллиптические,* в которых одно из расстояний между телами остается конечным, а два другие становятся бесконечно большими вида (17.2).

VI. *Движения ограниченные,* когда все три расстояния между телами имеют верхнюю границу.

VII. *Движения осциллирующие,* в которых для сколь угодно отдаленных моментов времени три расстояния между телами ограничены, а для других также сколь угодно отдаленных моментов два из этих расстояний произвольно велики.

Обозначим, как и раньше (§ 6, гл. XIV) через h_0 барицентрическую постоянную энергии.

Шази показал, что:

1° если $h_0 < 0$, то финальное движение может быть только вида III, V, VI или VII.

2° если $h_0 = 0$, то финальное движение будет, вообще говоря, вида III, но при надлежащих дополнительных ограничениях может принадлежать к виду IV.

3° если $h_0 > 0$, то движение принадлежит к одному из видов I, II или III.

В первых пяти из указанных видов движений задача трех тел распадается в пределе на две задачи двух тел, чем существенно упрощается изучение движения. Примеры движений этих пяти видов могут быть легко построены. Примерами движений вида VI могут служить периодические решения задачи трех тел. Вопрос о существовании движений вида VII в работах Шази остался открытым. Только недавно удалось доказать их существование [Ситников, 1960].

До сих пор мы рассматривали отдельно движения при $t \to -\infty$ и при $t \to +\infty$. Вопрос о возможных сочетаниях в одной траектории различных видов движения для этих интервалов времени, только намеченный в работах Шази, за последние десять лет стал предметом многочисленных исследований. Это явилось неожиданным результатом работ совсем в иной области науки, а именно, результатом попыток О. Ю. Шмидта сделать явления захвата при тесных сближениях трех космических тел основанием космогонической гипотезы, объясняющей и происхождение двойных звезд и происхождение планет (из захваченной Солнцем части космического пылевого облака). Вскоре было замечено, что такого рода попытки находятся в противоречии с результатами Шази о невозможности захвата, т. е. превращения движения гиперболического при $t \to -\infty$ в движение гиперболо-эллиптическое при $t \to +\infty$. Чтобы опровергнуть результаты Шази, О. Ю. Шмидт построил в 1947 г. при помощи численного интегрирования пример движения, в котором имеет место захват. Однако этот пример не был вполне убедителен: характер движения для $t \to -\infty$ и $t \to +\infty$ определялся в нем, так сказать, интуитивно, поскольку численное интегрирование нельзя продолжать до бесконечности. Необходимое дополнение было сделано в 1948 г. Г. Ф. Хильми, который дал критерии, позволяющие установить гиперболичность движения на одном конце интервала интегрирования и гиперболо-эллиптичность — на другом. Значительно более сильные критерии были найдены в 1953 и 1955 гг. Г. А. Мерманом. Они позволили не только умножить число примеров захвата, но и доказать, что вероятность захвата больше нуля. В работе Г. А. Мермана и Н. Г. Кочиной для частного случая плоской ограниченной задачи была выяснена (в первом приближении) та область фазового пространства, в которой захват имеет место.

Были даны также доказательства возможности (и положительной вероятности) захвата, не связанные с вычислением траекторий [Ситников, 1953; Алексеев, 1956; Сибахара, 1961а].

Так как дифференциальные уравнения движения не меняются при замене t на $-t$, то из каждой траектории захвата можно получить траекторию разрыва, т. е. такую, которая является гиперболо-эллиптической при $t \to -\infty$ и гиперболической при $t \to +\infty$.

Тщательный анализ работ Шази привел к заключению, что данное им доказательство невозможности захвата при $h_0 < 0$ (точнее, невозможности для одной и той же траектории быть ограниченной или осциллирующей при $t \to -\infty$ и быть гиперболо-эллиптической при $t \to +\infty$), по существу, правильно, хотя и нуждается в некоторых дополнениях. Что же касается опровергнутого доказательства невозможности захвата при $h_0 \geqslant 0$ (т. е. невозможности для гиперболического движения при $t \to -\infty$ перейти в гиперболо-эллиптическое при $t \to +\infty$), оказалось, что недосмотр Шази заключался в представлении этих двух движений одними и теми же рядами, тогда как ряды, служащие для представления каждого из этих движений, сходятся только для достаточно больших значений t и не могут служить для изучения свойств всей траектории [Мерман, 1954].

Удалось также доказать возможность обмена, т. е. существование траекторий, являющихся гиперболо-эллиптическими как при $t \to -\infty$, так и при $t \to +\infty$, но с разными парами тел, находящихся на конечном расстоянии [Алексеев, 1956; Сибахара, 1961b].

Наконец, оказалось возможным доказать существование осциллирующих траекторий, вдоль которых два взаимных расстояния могут становиться сколь угодно большнми как при $t \to +\infty$, так и при $t \to -\infty$, хотя и не стремятся к бесконечности [Ситников, 1960].

При переходе от задачи трех тел к задаче n тел обобщением вопросов захвата и разрыва являются вопросы образования и рассеивания устойчивых подсистем, состоящих из m тел ($m < n$). Такого рода вопросы изучались Г. Ф. Хильми [1951; 1958]*).

*) Изложение современного состояния вопроса об устойчивостн движения задаче трех тел можно найти в монографии Хагихара [1957]. *(Прим. ред.)*