ГЛАВА XVI

ОСНОВЫ ТЕОРИИ ВОЗМУЩЕННОГО ДВИЖЕНИЯ

§ 1. Теорема Пуанкаре

В теории возмущенного движения часто приходится иметь дело с системами дифференциальных уравнений, содержащих, кроме независимой переменной t и неизвестных $x, y, \ldots,$ еще параметр μ, значения которого можно считать близкими к нулю.

Ограничившись для упрощения письма случаем двух неизвестных, такую систему мы можем взять в форме

$$\frac{dx}{dt} = F(t, x, y, \mu), \quad \frac{dy}{dt} = G(t, x, y, \mu). \tag{1.1}$$

Правые части этих уравнений будем считать голоморфными функциями x, y, μ и непрерывными функциями t в некотором замкнутом интервале $[0, T]$.

Пусть при $\mu=0$ система (1.1) имеет решение $x_0(t)$, $y_0(t)$, определяемое начальными условиями $t=0$, $x_0=\alpha$, $y_0=\beta$, причем это решение непрерывно в интервале $[0, T]$. Во многих задачах приходится рассматривать решение $x(t)$, $y(t)$ системы (1.1), определяемое теми же начальными условиями, но для значений μ, отличных от нуля.

Пуанкаре [1892] доказал, что при указанных предположениях такое решение существует и может быть представлено рядами

$$\left.\begin{aligned} x(t) &= x_0(t) + \mu x_1(t) + \mu^2 x_2(t) + \ldots, \\ y(t) &= y_0(t) + \mu y_1(t) + \mu^2 y_2(t) + \ldots, \end{aligned}\right\} \tag{1.2}$$

сходящимися прн достаточно малых значениях $|\mu|$, каково бы ни было $t \in [0, T]$. Коэффициенты рядов (1.2) должны, очевидно, удовлетворять условиям

$$x_n(0) = 0, \quad y_n(0) = 0 \qquad (n = 1, 2, \ldots). \tag{1.3}$$

Введем в уравнения (1.1) новые неизвестные:

$$\left.\begin{aligned} x' &= x - x_0 = \mu x_1 + \mu^2 x_2 + \ldots, \\ y' &= y - y_0 = \mu y_1 + \mu^2 y_2 + \ldots \end{aligned}\right\} \tag{1.4}$$

Это даст уравнения

$$\frac{dx'}{dt}=f(t,\ x',\ y',\ \mu),\quad \frac{dy'}{dt}=g(t,\ x',\ y',\ \mu), \tag{1.5}$$

правые части которых являются голоморфными функциями x', y', μ в области точки $(0, 0, 0)$, каким бы ни было $t\in[0, T]$, причем

$$f(t, 0, 0, 0)=0, \qquad g(t, 0, 0, 0)=0.$$

Хорошо известные свойства аналитических функций позволяют утверждать, что при каждом значении t существуют такие положительные числа m, a, b, c (вообще говоря, зависящие от t), что функция

$$h=\frac{m}{(1-ax')(1-by')(1-c\mu)}-m$$

является мажорантой правых частей уравнений (1.5) по аргументам x', y', μ. Это значит, что в точке $x'=0$, $y'=0$, $\mu=0$ при избранном значении t имеют место неравенства

$$\left|\frac{\partial^{l+k+l}f}{\partial x'^{l}\,\partial y'^{k}\,\partial\mu^{l}}\right|\leqslant\frac{\partial^{l+k+l}h}{\partial x'^{l}\,\partial y'^{k}\,\partial\mu^{l}},\quad \left|\frac{\partial^{l+k+l}g}{\partial x'^{l}\,\partial y'^{k}\,\partial\mu^{l}}\right|\leqslant\frac{\partial^{l+k+l}h}{\partial x'^{l}\,\partial y'^{k}\,\partial\mu^{l}}$$

для всех неотрицательных значений i, k, l.

Совокупность этих неравенств запишем символически так:

$$f\ll h,\quad g\ll h,\quad (\arg\cdot x',\ y',\ \mu).$$

Наибольшее из значений, принимаемых m для $t\in[0,\ T]$, обозначим через M, а наибольшее из значений a, b, c — через A.

Легко убедиться, что функция

$$H(x',\ y',\ \mu)=MA(x'+y'+\mu)\frac{1+A(x'+y'+\mu)}{1-A(x'+y'+\mu)}$$

является мажорантой для h, а потому

$$f\ll H,\quad g\ll H,\quad (\arg\cdot x',\ y',\ \mu) \tag{1.6}$$

для всех $t\in[0, T]$.

Обратимся теперь к нахождению решений (1.4) уравнений (1.5), удовлетворяющих начальным условиям $t=0$, $x'=0$, $y'=0$.

Одновременно будем рассматривать решение мажорирующей системы

$$\frac{dX}{dt}=H(X,\ Y,\ \mu),\quad \frac{dY}{dt}=H(X,\ Y,\ \mu), \tag{1.7}$$

удовлетворяющее начальным условиям $t=0$, $X=0$, $Y=0$. Это решение можно представить, как будет дальше показано, рядами, аналогичными (1.4), а именно:

$$\left.\begin{aligned} X&=\mu X_1+\mu^2X_2+\ldots,\\ Y&=\mu Y_1+\mu^2Y_2+\ldots \end{aligned}\right\} \tag{1.8}$$

Коэффициенты $X_1=Y_1$, $X_2=Y_2$, ... этих рядов равны нулю при $t=0$.

Подставим ряды (1.4) в уравнения (1.5) и разложим полученные выражения по степеням μ. Приравняв члены, имеющие множителем μ, получим уравнения

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt}&=\frac{\partial f}{\partial x'}x_1+\frac{\partial f}{\partial y'}y_1+\frac{\partial f}{\partial \mu},\\ \frac{dy_1}{dt}&=\frac{\partial g}{\partial x'}x_1+\frac{\partial g}{\partial y'}y_1+\frac{\partial g}{\partial \mu}, \end{aligned}\right\} \tag{1.9}$$

в правых частях которых положено $x'=0$, $y'=0$, $\mu=0$. Эти уравнения, совместно с начальными условиями $x_1(0)=0$, $y_1(0)=0$, позволяют найти функции $x_1(t)$, $y_1(t)$.

Для нахождения следующих коэффициентов $x_2(t)$, $y_2(t)$ будем иметь, приравняв члены, содержащие μ^2, аналогичные уравнения

$$\frac{dx_2}{dt}=\frac{\partial f}{\partial x'}x_2+\frac{\partial f}{\partial y'}y_2+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x'^2}x_1^2+\frac{\partial^2 f}{\partial x'\,\partial y'}x_1y_1+\ldots,$$

$$\frac{dy_2}{dt}=\frac{\partial g}{\partial x'}x_2+\frac{\partial g}{\partial y'}y_2+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 g}{\partial x'^2}x_1^2+\ldots$$

В правых частях этих уравнений должна быть сделана подстановка $x'=0$, $y'=0$, $\mu=0$, а для x_1 и y_1 взяты значения, полученные из уравнений (1.9).

Поступая таким образом дальше, мы найдем последовательно все коэффициенты x_n, y_n разложений (1.2). Так как, по условию,

$$x(0)=x_0(0)=\alpha,\quad y(0)=y_0(0)=\beta,$$

то начальные условия, фиксирующие эти коэффициенты, будут выражаться равенствами (1.3).

Для вычисления коэффициентов X_1, Y_1; X_2, Y_2, ... рядов (1.8) мы можем применить тот же прием. Вместо уравнений (1.9) будем иметь

$$\left.\begin{aligned} \frac{dX_1}{dt}&=\frac{\partial H}{\partial X}X_1+\frac{\partial H}{\partial Y}Y_1+\frac{\partial H}{\partial \mu},\\ \frac{dY_1}{dt}&=\frac{\partial H}{\partial X}X_1+\frac{\partial H}{\partial Y}Y_1+\frac{\partial H}{\partial \mu} \end{aligned}\right\} \tag{1.10}$$

и аналогичные начальные условия $X_1(0)=0$, $Y_1(0)=0$.

Сопоставляя (1.9) и (1.10) и учитывая (1.6), приходим к заключению, что для $t=0$ имеют место неравенства

$$\left|\frac{dx_1}{dt}\right| < \frac{dX_1}{dt}, \quad \left|\frac{dy_1}{dt}\right| < \frac{dY_1}{dt}. \tag{1.11}$$

Отсюда следует, что при возрастании t в некотором интервале мы будем иметь

$$|x_1| < X_1, \quad |y_1| < Y_1. \tag{1.12}$$

Но из неравенств (1.12) и (1.6) будут снова вытекать неравенства (1.11), а значит, и (1.12), при дальнейшем увеличении t. Таким образом, неравенства (1.12) должны иметь место во всем интервале $[0, T]$. Точно так же убеждаемся в справедливости, для всего интервала $[0, T]$, неравенств

$$|x_n| < X_n, \quad |y_n| < Y_n.$$

Покажем теперь, выполнив решение уравнений (1.7) при помощи элементарных функций, что ряды (1.8) сходятся для достаточно малых значений μ. Положив

$$A(X + Y + \mu) = z,$$

что дает

$$X = Y = (z - A\mu)/2A, \tag{1.13}$$

мы можем заменить уравнения (1.7) таким:

$$\frac{dz}{dt} = 2MAz\,\frac{1+z}{1-z}.$$

Решение этого уравнения, соответствующее нашим начальным условиям, можно написать так:

$$\frac{z}{(1+z)^2} = \frac{A\mu\tau}{(1+A\mu)^2}, \tag{1.14}$$

где

$$\tau = \exp(2MAt).$$

Функция $z(\mu)$, определяемая равенством (1.14), очевидно, голоморфна в точке $\mu=0$ при любом положительном значении t, а потому разлагается, так же как и функции (1.13), в сходящийся ряд по целым положительным степеням μ.

Чтобы оценить величину радиуса сходимости, заменим уравнение (1.14) таким:

$$z = 1 - \frac{1}{2\nu} - \frac{1}{2\nu}\sqrt{1 - 4\nu},$$

где

$$\nu = A\mu\tau(1 + A\mu)^{-2}.$$

Отсюда ясно, что сходимость рассматриваемых рядов будет иметь место лишь при $\nu < 1/4$, иначе говоря, при значениях μ, не превосходящих

$$\mu_1(t)=\left(2\tau-1-2\sqrt{\tau^2-\tau}\right)A^{-1}=A^{-1}\left(\frac{1}{4}\frac{1}{\tau}+\frac{1}{8}\frac{1}{\tau^2}+\ldots\right).$$

Так как эта функция монотонно убывает от $\mu_1(0)$ до $\mu_1(T)$, то ряды (1.8), а следовательно, и (1.2), будут сходиться при $\mu<\mu_1(T)$ для всех $t\in[0, T]$.

Теорема Пуанкаре о существовании решения, представимого рядами (1.2), полностью доказана. Заметим, что изложенное доказательство дает эффективный метод для получения рассматриваемого решения. Нужно прежде всего решить однородную систему, соответствующую линейным уравнениям (1.9), после чего функции $x_1(t)$, $y_1(t)$ найдутся при помощи квадратур. Нахождение $x_2(t)$, $y_2(t)$ и всех последующих коэффициентов ряда (1.2) потребует также лишь выполнения квадратур.

Однородная система, решение которой позволяет свести вычисление всех коэффициентов рядов (1.2) к квадратурам, т. е.

$$\frac{d\xi}{dt}=\frac{\partial f}{\partial x'}\xi+\frac{\partial f}{\partial y'}\eta;\quad \frac{d\eta}{dt}=\frac{\partial g}{\partial x'}\xi+\frac{\partial g}{\partial y'}\eta, \tag{1.15}$$

является, очевидно, уравнениями в вариациях (§ 16, гл. XV) для системы (1.5) по отношению к решению $x'=0$, $y'=0$, имеющему место при $\mu=0$.

Если известно общее решение $x'(t, C_1, C_2)$, $y'(t, C_1, C_2)$ уравнений

$$\frac{dx'}{dt}=f(t, x', y', 0);\quad \frac{dy'}{dt}=g(t, x', y', 0),$$

то выражения

$$\xi_i=\frac{\partial x'}{\partial C_i};\quad \eta_i=\frac{\partial y'}{\partial C_i}\qquad (i=1,\ 2)$$

дадут, как легко видеть, частные, линейно независимые решения системы (1.15). Таким образом, будет известно общее решение уравнений в вариациях и нахождение всех коэффициентов $x_n(t)$, $y_n(t)$ приведется к выполнению квадратур.

Изложенное доказательство делает очевидной применимость теоремы Пуанкаре для систем любого порядка, заключающих произвольное число параметров.

§ 2. Решение уравнений возмущенного движения способом последовательных приближений

В предыдущем параграфе мы рассматривали дифференциальные уравнения, заключающие параметры (которые всегда можно считать малыми) весьма общим образом. При изучении возмущенного движения малые параметры входят в дифферен-