превосходящих

$$\mu_1(t) = (2\tau - 1 - 2\sqrt{\tau^2 - \tau})\,A^{-1} = A^{-1}\left(\frac{1}{4}\frac{1}{\tau} + \frac{1}{8}\frac{1}{\tau^2} + \ldots\right).$$

Так как эта функция монотонно убывает от $\mu_1(0)$ до $\mu_1(T)$, то ряды (1.8), а следовательно, и (1.2), будут сходиться при $\mu < \mu_1(T)$ для всех $t \in [0, T]$.

Теорема Пуанкаре о существовании решения, представимого рядами (1.2), полностью доказана. Заметим, что изложенное доказательство дает эффективный метод для получения рассматриваемого решения. Нужно прежде всего решить однородную систему, соответствующую линейным уравнениям (1.9), после чего функции $x_1(t)$, $y_1(t)$ найдутся при помощи квадратур. Нахождение $x_2(t)$, $y_2(t)$ и всех последующих коэффициентов ряда (1.2) потребует также лишь выполнения квадратур.

Однородная система, решение которой позволяет свести вычисление всех коэффициентов рядов (1.2) к квадратурам, т. е.

$$\frac{d\xi}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x'}\xi + \frac{\partial f}{\partial y'}\eta; \quad \frac{d\eta}{dt} = \frac{\partial g}{\partial x'}\xi + \frac{\partial g}{\partial y'}\eta, \tag{1.15}$$

является, очевидно, уравнениями в вариациях (§ 16, гл. XV) для системы (1.5) по отношению к решению $x' = 0$, $y' = 0$, имеющему место при $\mu = 0$.

Если известно общее решение $x'(t, C_1, C_2)$, $y'(t, C_1, C_2)$ уравнений

$$\frac{dx'}{dt} = f(t, x', y', 0); \quad \frac{dy'}{dt} = g(t, x', y', 0),$$

то выражения

$$\xi_i = \frac{\partial x'}{\partial C_i}; \quad \eta_i = \frac{\partial y'}{\partial C_i} \qquad (i = 1, 2)$$

дадут, как легко видеть, частные, линейно независимые решения системы (1.15). Таким образом, будет известно общее решение уравнений в вариациях и нахождение всех коэффициентов $x_n(t)$, $y_n(t)$ приведется к выполнению квадратур.

Изложенное доказательство делает очевидной применимость теоремы Пуанкаре для систем любого порядка, заключающих произвольное число параметров.

§ 2. Решение уравнений возмущенного движения способом последовательных приближений

В предыдущем параграфе мы рассматривали дифференциальные уравнения, заключающие параметры (которые всегда можно считать малыми) весьма общим образом. При изучении возмущенного движения малые параметры входят в дифференциальные уравнения так, что для получения разложений вида (1.2) могут быть применены некоторые специальные способы, более удобные, нежели изложенный в предыдущем параграфе.

Если, например, возмущенное движение изучается при помощи прямолинейных координат, то массы возмущающих тел, являющиеся здесь малыми параметрами, входят лишь множителями членов, составляющих правые части уравнений (§ 4, гл. XIV). Мы увидим, далее, что употребляя вместо координат надлежащим образом выбранные величины a, e, ..., мы будем иметь для нахождения этих величин уравнения вида

$$\left.\begin{aligned} \frac{da}{dt} &= m'A'(t, a, e, \ldots) + m''A''(t, a, e, \ldots) + \ldots, \\ \frac{de}{dt} &= m'E'(t, a, e, \ldots) + m''E''(t, a, e, \ldots) + \ldots, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{aligned}\right\} \tag{2.1}$$

где через m', m'', ... обозначены малые параметры.

В этом случае исходное решение, получающееся при $m' = m'' = \ldots = 0$, имеет вид

$$a = a_0, \quad e = e_0, \ldots, \tag{2.2}$$

где за постоянные интегрирования a_0, e_0, ... взяты значения a, e, ... при $t = t_0$.

Подставив значения (2.2) в правые части уравнений (2.1), получим

$$a = a_0 + \delta_1 a; \quad e = e_0 + \delta_1 e; \ldots, \tag{2.3}$$

где

$$\delta_1 a = \int_{t_0}^{t} [m'A'(a_0, e_0, \ldots) + m''A''(a_0, e_0, \ldots) + \ldots]\, dt; \ldots$$

Если значения (2.3), отличающиеся от точных значений на величины второго порядка относительно параметров m', m'', ..., подставить в правые части уравнений (2.1) и ограничиться членами второго порядка, то после интегрирования будем иметь

$$a = a_0 + \delta_1 a + \delta_2 a; \quad e = e_0 + \delta_1 e + \delta_2 e; \ldots, \tag{2.4}$$

где

$$\delta_2 a = \int_{t_0}^{t} \left[m'\left(\frac{\partial A'}{\partial a}\delta_1 a + \frac{\partial A'}{\partial e}\delta_1 e + \ldots \right) + \ldots \right] dt; \ldots$$

Повторение этого приема даст разложения

$$a = a_0 + \sum \delta_n a; \quad e = e_0 + \sum \delta_n e; \ldots, \tag{2.5}$$

в которых через $\delta_n a$, $\delta_n e$, ... обозначены члены n-й степени относительно m', m'', ...

Теорема Пуанкаре показывает, что ряды (2.5) сходятся для достаточно малых значений параметров m', m'', ..., если t находится внутри замкнутого интервала, заключающего t_0, в котором правые части уравнений (2.1) непрерывны.

Указанный прием нахождения первых приближений (2.3), (2.4), ... широко использовался в небесной механике начиная еще с середины XVIII столетия. Но обоснование этого приема как разложения искомого решения по степеням малых параметров было впервые дано теоремой Пуанкаре. Доказательство, данное Пуанкаре, открыло, кроме того, путь для оценки точности получаемых результатов.

§ 3. Мгновенные элементы

Рассмотрим движение тела P, имеющего массу m, относительно центрального тела S, масса которого принята за единицу, под действием их взаимного притяжения.

Примем S за начало прямолинейной инерциальной координатной системы, а через k^2 обозначим произведение постоянной тяготения на сумму масс. Уравнения движения напишутся так (§ 1 гл. III):

$$\left.\begin{aligned} \ddot{x}+k^2xr^{-3}&=0,\\ \ddot{y}+k^2yr^{-3}&=0,\\ \ddot{z}+k^2zr^{-3}&=0. \end{aligned}\right\} \tag{3.1}$$

Если, кроме притяжения центрального тела на P, действует еще некоторая сила (mF_x, mF_y, mF_z), то вместо (3.1) мы будем иметь такие уравнения движения:

$$\left.\begin{aligned} \ddot{x}+k^2xr^{-3}&=F_x,\\ \ddot{y}+k^2yr^{-3}&=F_y,\\ \ddot{z}+k^2zr^{-3}&=F_z. \end{aligned}\right\} \tag{3.2}$$

Движение, определяемое уравнениями (3.1), называется невозмущенным, или кеплеровым, тогда как движение, соответствующее уравнениям (3.2), носит название возмущенного движения.

Общее решение уравнения (3.1) нам известно. Его можно написать в форме

$$\left.\begin{aligned} x&=f_1(t, e_1, \ldots, e_6),\\ y&=f_2(t, e_1, \ldots, e_6),\\ z&=f_3(t, e_1, \ldots, e_6), \end{aligned}\right\} \tag{3.3}$$

где через $e_1, \ldots, e_6$ обозначены элементы орбиты.