Теорема Пуанкаре показывает, что ряды (2.5) сходятся для достаточно малых значений параметров $m'$, $m''$, ..., если $t$ находится внутри замкнутого интервала, заключающего $t_0$, в котором правые части уравнений (2.1) непрерывны.

Указанный прием нахождения первых приближений (2.3), (2.4), ... широко использовался в небесной механике начиная еще с середины XVIII столетия. Но обоснование этого приема как разложения искомого решения по степеням малых параметров было впервые дано теоремой Пуанкаре. Доказательство, данное Пуанкаре, открыло, кроме того, путь для оценки точности получаемых результатов.

## § 3. Мгновенные элементы

Рассмотрим движение тела $P$, имеющего массу $m$, относительно центрального тела $S$, масса которого принята за единицу, под действием их взаимного притяжения.

Примем $S$ за начало прямолинейной инерциальной координатной системы, а через $k^2$ обозначим произведение постоянной тяготения на сумму масс. Уравнения движения напишутся так (§ 1 гл. III):

$$\left.\begin{aligned} \ddot{x}+k^2xr^{-3}&=0,\\ \ddot{y}+k^2yr^{-3}&=0,\\ \ddot{z}+k^2zr^{-3}&=0. \end{aligned}\right\} \tag{3.1}$$

Если, кроме притяжения центрального тела на $P$, действует еще некоторая сила $(mF_x, mF_y, mF_z)$, то вместо (3.1) мы будем иметь такие уравнения движения:

$$\left.\begin{aligned} \ddot{x}+k^2xr^{-3}&=F_x,\\ \ddot{y}+k^2yr^{-3}&=F_y,\\ \ddot{z}+k^2zr^{-3}&=F_z. \end{aligned}\right\} \tag{3.2}$$

Движение, определяемое уравнениями (3.1), называется *невозмущенным*, или *кеплеровым*, тогда как движение, соответствующее уравнениям (3.2), носит название *возмущенного движения*.

Общее решение уравнения (3.1) нам известно. Его можно написать в форме

$$\left.\begin{aligned} x&=f_1(t, e_1, \ldots, e_6),\\ y&=f_2(t, e_1, \ldots, e_6),\\ z&=f_3(t, e_1, \ldots, e_6), \end{aligned}\right\} \tag{3.3}$$

где через $e_1, \ldots, e_6$ обозначены элементы орбиты.

Решение уравнений (3.2) можно искать в той же самой форме (3.3), считая элементы не постоянными, а надлежащим образом выбранными функциями времени. Полученные таким образом элементы $e_1(t), \ldots, e_6(t)$ носят название мгновенных. Совокупность этих элементов дает мгновенную орбиту тела $P$ для момента $t$. Знание мгновенной орбиты позволяет вычислять координаты $P$ для любого момента $t$ по формулам кеплерова движения (3.3).

Подстановка выражений (3.3) в уравнения (3.2) дает три уравнения, которым должны удовлетворять шесть функций $e_i(t)$. Таким образом, мгновенные элементы определяются не однозначно. Их можно подчинить еще трем дополнительным условиям. Наиболее важный для нас выбор этих дополнительных условий, делающий элементы вполне определенными, будет указан в следующем параграфе.

Если возмущающее ускорение $(F_x, F_y, F_z)'$ является суммой величин, имеющих множителями малые параметры $m', m'', \ldots$, и, следовательно, обращается в нуль вместе с этими параметрами, то для нахождения мгновенных элементов может быть использован прием, изложенный в предыдущем параграфе.

## § 4. Оскулирующие элементы

Для невозмущенного движения элементы $e_i$ сохраняют постоянные значения, поэтому формулы (3.3) в этом случае дают

$$\dot{x} = \partial f_1/\partial t; \quad \dot{y} = \partial f_2/\partial t; \quad \dot{z} = \partial f_3/\partial t. \tag{4.1}$$

Если мгновенные элементы $e_i(t)$ подчинить дополнительным условиям

$$\sum_{1}^{6} \frac{\partial f_k}{\partial e_l} \frac{de_l}{dt} = 0 \qquad (k = 1,\ 2,\ 3), \tag{4.2}$$

то те же самые формулы (4.1) будут служить для вычисления скорости и в возмущенном движении. Такие мгновенные элементы, однозначно определяемые равенствами (3.3) и (4.1), получили название оскулирующих. Их можно определить следующим образом:

Оскулирующими элементами для момента $t$ называются такие элементы $e_i(t)$, которые дают положение и скорость для этого момента по формулам невозмущенного движения.

Орбита, определяемая оскулирующими элементами в какой-либо момент $t$, называется оскулирующей орбитой для этого момента времени, а $t$ — моментом или эпохой оскуляции. Таким образом, оскулирующая орбита в момент $t$ это