Решение уравнений (3.2) можно искать в той же самой форме (3.3), считая элементы не постоянными, а надлежащим образом выбранными функциями времени. Полученные таким образом элементы $e_1(t), \ldots, e_6(t)$ носят название мгновенных. Совокупность этих элементов дает мгновенную орбиту тела P для момента t. Знание мгновенной орбиты позволяет вычислять координаты P для любого момента t по формулам кеплерова движения (3.3).

Подстановка выражений (3.3) в уравнения (3.2) дает три уравнения, которым должны удовлетворять шесть функций $e_i(t)$. Таким образом, мгновенные элементы определяются не однозначно. Их можно подчинить еще трем дополнительным условиям. Наиболее важный для нас выбор этих дополнительных условий, делающий элементы вполне определенными, будет указан в следующем параграфе.

Если возмущающее ускорение $(F_x, F_y, F_z)'$ является суммой величин, имеющих множителями малые параметры $m', m'', \ldots$, и, следовательно, обращается в нуль вместе с этими параметрами, то для нахождения мгновенных элементов может быть использован прием, изложенный в предыдущем параграфе.

§ 4. Оскулирующие элементы

Для невозмущенного движения элементы e_i сохраняют постоянные значения, поэтому формулы (3.3) в этом случае дают

$$\dot{x} = \partial f_1/\partial t; \quad \dot{y} = \partial f_2/\partial t; \quad \dot{z} = \partial f_3/\partial t. \tag{4.1}$$

Если мгновенные элементы $e_i(t)$ подчинить дополнительным условиям

$$\sum_{1}^{6} \frac{\partial f_k}{\partial e_l} \frac{de_l}{dt} = 0 \qquad (k = 1, 2, 3), \tag{4.2}$$

то те же самые формулы (4.1) будут служить для вычисления скорости и в возмущенном движении. Такие мгновенные элементы, однозначно определяемые равенствами (3.3) и (4.1), получили название оскулирующих. Их можно определить следующим образом:

Оскулирующими элементами для момента t называются такие элементы $e_i(t)$, которые дают положение и скорость для этого момента по формулам невозмущенного движения.

Орбита, определяемая оскулирующими элементами в какой-либо момент t, называется оскулирующей орбитой для этого момента времени, а t — моментом или эпохой оскуляции. Таким образом, оскулирующая орбита в момент t это та кеплерова орбита, которая соответствует положению и скорости тела P в этот момент. Она может быть вычислена для любого момента времени, каково бы ни было движение тела P, если мы знаем положение и скорость тела P в рассматриваемый момент, а также массу этого тела. Для этого служат методы, изученные в гл. V.

Хотя оскулирующими элементами можно пользоваться при изучении какого угодно движения, но наиболее полезным этот метод является в тех случаях, когда возмущающее ускорение F мало́ по сравнению с притяжением центрального тела.

Чтобы сравнить действительное движение с введенным нами фиктивным движением по оскулирующей орбите, напишем уравнения (3.2) рассматриваемого возмущенного движения следующим образом:

$$\frac{dx}{dt}=\dot{x}, \quad \frac{d\dot{x}}{dt}=-k^2xr^{-3}+F_x; \ldots \tag{4.3}$$

Если обозначить через x', y', z' координаты фиктивной точки P', движущейся по оскулирующей орбите, то соответствующие уравнения (3.1) можно написать так:

$$\frac{dx'}{dt}=\dot{x}'; \frac{d\dot{x}'}{dt}=-k^2x'r'^{-3}; \ldots \tag{4.4}$$

В момент оскуляции t, по определению, имеем

$$\left.\begin{array}{llll} x=x', & y=y', & z=z', & r=r', \\ \dot{x}=\dot{x}', & \dot{y}=\dot{y}', & \dot{z}=\dot{z}', & \end{array}\right\} \tag{4.5}$$

а потому, на основании (4.3) и (4.4),

$$\left.\begin{array}{lll} \dfrac{dx}{dt}=\dfrac{dx'}{dt}; & \dfrac{dy}{dt}=\dfrac{dy'}{dt}; & \dfrac{dz}{dt}=\dfrac{dz'}{dt}; \\ \dfrac{d\dot{x}}{dt}=\dfrac{d\dot{x}'}{dt}+F_x; & \dfrac{d\dot{y}}{dt}=\dfrac{d\dot{y}'}{dt}+F_y; & \dfrac{d\dot{z}}{dt}=\dfrac{d\dot{z}'}{dt}+F_z. \end{array}\right\} \tag{4.6}$$

Координаты точек P и P' в момент $t+\Delta t$, достаточно близкий к t, могут быть найдены по формуле Тэйлора:

$$x(t+\Delta t)=x+\frac{dx}{dt}\Delta t+\frac{1}{2!}\frac{d^2x}{dt^2}(\Delta t)^2+\ldots,$$

$$x'(t+\Delta t)=x'+\frac{dx}{dt}\Delta t+\frac{1}{2!}\frac{d^2x'}{dt^2}(\Delta t)^2+\ldots$$

Отсюда, учитывая (4.3)—(4.5), получим

$$x(t+\Delta t)-x'(t+\Delta t)=\frac{1}{2}F_x(\Delta t)^2+\ldots$$

Таким образом, расстояние $P'P$ есть величина порядка произведения возмущающего ускорения на квадрат промежутка времени Δt. Во многих случаях смещение $P'P$ оказывается настолько малым, что им можно пренебречь.

Например, взяв оскулирующую орбиту для момента, лежащего в середине охватываемого наблюдениями промежутка времени, нередко можно ею представить движение малой планеты или кометы в течение нескольких недель (или даже месяцев) с погрешностью, исчезающе малой по сравнению с ошибками наблюдений.

§ 5. Нахождение оскулирующих элементов

Чтобы получить дифференциальные уравнения, дающие оскулирующие элементы, достаточно в уравнениях (4.3) выполнить подстановку, определяемую формулами (3.3) и (4.1). Эта подстановка

$$\left.\begin{aligned} x &= f_1(t,\ e_1,\ \ldots,\ e_6),\ \ldots, \\ \dot{x} &= \frac{\partial}{\partial t} f_1(t,\ e_1,\ \ldots,\ e_6),\ \ldots \end{aligned}\right\} \tag{5.1}$$

вводит вместо неизвестных x, $\dot{x}$, y, $\dot{y}$, z, $\dot{z}$ новые неизвестные $e_1, \ldots, e_6$.

Форма зависимостей (5.1) между старыми и новыми неизвестными подсказывается формулами

$$\left.\begin{aligned} x' &= f_1(t,\ e_1,\ \ldots,\ e_6),\ \ldots, \\ \dot{x}' &= \frac{\partial}{\partial t} f_1(t,\ e_1,\ \ldots,\ e_6),\ \ldots, \end{aligned}\right\} \tag{5.2}$$

дающими общее решение уравнений (4.4) соответствующего невозмущенного движения. Введение оскулирующих элементов является, таким образом, применением общего метода вариации произвольных постоянных, созданного Эйлером.

Прямая подстановка выражений (5.1) в уравнения (4.3) приводит к очень сложным вычислениям. Мы изберем другой путь, основанный на использовании интегралов системы (4.4).

Такой интеграл в самом общем случае имеет вид

$$\Psi(e_1,\ \ldots,\ e_6,\ x',\ y',\ z',\ \dot{x}',\ \dot{y}',\ \dot{z}',\ t) = 0, \tag{5.3}$$

где $e_1, \ldots, e_6$ — постоянные интегрирования, принятые нами за элементы орбиты.

Соотношение (5.3) есть следствие соотношений (5.2), имеющих тот же вид, что и (5.1). Поэтому между координатами возмущенного движения и оскулирующими элементами $e_1(t), \ldots$