Таким образом, расстояние $P'P$ есть величина порядка произведения возмущающего ускорения на квадрат промежутка времени Δt. Во многих случаях смещение $P'P$ оказывается настолько малым, что им можно пренебречь.

Например, взяв оскулирующую орбиту для момента, лежащего в середине охватываемого наблюдениями промежутка времени, нередко можно ею представить движение малой планеты или кометы в течение нескольких недель (или даже месяцев) с погрешностью, исчезающе малой по сравнению с ошибками наблюдений.

§ 5. Нахождение оскулирующих элементов

Чтобы получить дифференциальные уравнения, дающие оскулирующие элементы, достаточно в уравнениях (4.3) выполнить подстановку, определяемую формулами (3.3) и (4.1). Эта подстановка

$$\left.\begin{aligned} x &= f_1(t,\ e_1,\ \ldots,\ e_6),\ \ldots, \\ \dot{x} &= \frac{\partial}{\partial t} f_1(t,\ e_1,\ \ldots,\ e_6),\ \ldots \end{aligned}\right\} \tag{5.1}$$

вводит вместо неизвестных x, $\dot{x}$, y, $\dot{y}$, z, $\dot{z}$ новые неизвестные $e_1, \ldots, e_6$.

Форма зависимостей (5.1) между старыми и новыми неизвестными подсказывается формулами

$$\left.\begin{aligned} x' &= f_1(t,\ e_1,\ \ldots,\ e_6),\ \ldots, \\ \dot{x}' &= \frac{\partial}{\partial t} f_1(t,\ e_1,\ \ldots,\ e_6),\ \ldots, \end{aligned}\right\} \tag{5.2}$$

дающими общее решение уравнений (4.4) соответствующего невозмущенного движения. Введение оскулирующих элементов является, таким образом, применением общего метода вариации произвольных постоянных, созданного Эйлером.

Прямая подстановка выражений (5.1) в уравнения (4.3) приводит к очень сложным вычислениям. Мы изберем другой путь, основанный на использовании интегралов системы (4.4).

Такой интеграл в самом общем случае имеет вид

$$\Psi(e_1,\ \ldots,\ e_6,\ x',\ y',\ z',\ \dot{x}',\ \dot{y}',\ \dot{z}',\ t) = 0, \tag{5.3}$$

где $e_1, \ldots, e_6$ — постоянные интегрирования, принятые нами за элементы орбиты.

Соотношение (5.3) есть следствие соотношений (5.2), имеющих тот же вид, что и (5.1). Поэтому между координатами возмущенного движения и оскулирующими элементами $e_1(t), \ldots$

..., $e_6(t)$ существует такое же соотношение:

$$\Psi(e_1, \ldots, e_6, x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, t) = 0. \tag{5.4}$$

Дифференцирование соотношений (5.3) и (5.4) дает

$$\frac{\partial \Psi}{\partial x'} \frac{dx'}{dt} + \ldots + \frac{\partial \Psi}{\partial \dot{x}'} \frac{d\dot{x}'}{dt} + \ldots + \frac{\partial \Psi}{\partial t} = 0, \tag{5.5}$$

$$\frac{\partial \Psi}{\partial e_1} \frac{de_1}{dt} + \ldots + \frac{\partial \Psi}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \ldots + \frac{\partial \Psi}{\partial \dot{x}} \frac{d\dot{x}}{dt} + \ldots + \frac{\partial \Psi}{\partial t} = 0. \tag{5.6}$$

Но в момент t имеют место равенства (4.5) и (4.6), а оскулирующие элементы равны постоянным элементам рассматриваемого нами невозмущенного движения. Поэтому, вычитая почленно (5.5) из (5.6), получим

$$\frac{\partial \Psi}{\partial e_1} \frac{de_1}{dt} + \ldots + \frac{\partial \Psi}{\partial e_6} \frac{de_6}{dt} + \frac{\partial \Psi}{\partial \dot{x}} F_x + \frac{\partial \Psi}{\partial \dot{y}} F_y + \frac{\partial \Psi}{\partial \dot{z}} F_z = 0. \tag{5.7}$$

Итак, всякое соотношение вида (5.4) между оскулирующими элементами, координатами и их производными дает соответствующее соотношение (5.7) между оскулирующими элементами и компонентами возмущающего ускорения.

Заметим, что величины x, $\dot{x}$, ..., входящие в (5.7), можно исключить при помощи соотношений (5.1).

Переход от (5.4) к (5.7) является той основной операцией, которая, будучи применена к шести независимым соотношениям вида (5.4), даст нам шесть дифференциальных уравнений, вполне определяющих оскулирующие элементы.

§ 6. Уравнения Эйлера

Рассмотрим случай, когда за элементы e_1, ..., e_6, рассматривавшиеся нами в предыдущем параграфе, приняты обычные кеплеровы элементы a, e, i, Ω, ω, M_0.

Здесь мы можем непосредственно использовать хорошо известные интегралы задачи двух тел, изученные в гл. III. Производство выкладок разделим на следующие этапы.

1. *Параметр, долгота узла и наклон орбиты.* За соотношение (5.4) примем каждый из интегралов площадей:

$$k\sqrt{p}\sin i \sin\Omega = y\dot{z} - z\dot{y},$$

$$k\sqrt{p}\sin i \cos\Omega = x\dot{z} - z\dot{x},$$

$$k\sqrt{p}\cos i = x\dot{y} - y\dot{x}.$$