..., $e_6(t)$ существует такое же соотношение:

$$\Psi(e_1, \ldots, e_6, x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, t) = 0. \tag{5.4}$$

Дифференцирование соотношений (5.3) и (5.4) дает

$$\frac{\partial \Psi}{\partial x'} \frac{dx'}{dt} + \ldots + \frac{\partial \Psi}{\partial \dot{x}'} \frac{d\dot{x}'}{dt} + \ldots + \frac{\partial \Psi}{\partial t} = 0, \tag{5.5}$$

$$\frac{\partial \Psi}{\partial e_1} \frac{de_1}{dt} + \ldots + \frac{\partial \Psi}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \ldots + \frac{\partial \Psi}{\partial \dot{x}} \frac{d\dot{x}}{dt} + \ldots + \frac{\partial \Psi}{\partial t} = 0. \tag{5.6}$$

Но в момент t имеют место равенства (4.5) и (4.6), а оскулирующие элементы равны постоянным элементам рассматриваемого нами невозмущенного движения. Поэтому, вычитая почленно (5.5) из (5.6), получим

$$\frac{\partial \Psi}{\partial e_1} \frac{de_1}{dt} + \ldots + \frac{\partial \Psi}{\partial e_6} \frac{de_6}{dt} + \frac{\partial \Psi}{\partial \dot{x}} F_x + \frac{\partial \Psi}{\partial \dot{y}} F_y + \frac{\partial \Psi}{\partial \dot{z}} F_z = 0. \tag{5.7}$$

Итак, всякое соотношение вида (5.4) между оскулирующими элементами, координатами и их производными дает соответствующее соотношение (5.7) между оскулирующими элементами и компонентами возмущающего ускорения.

Заметим, что величины x, $\dot{x}$, ..., входящие в (5.7), можно исключить при помощи соотношений (5.1).

Переход от (5.4) к (5.7) является той основной операцией, которая, будучи применена к шести независимым соотношениям вида (5.4), даст нам шесть дифференциальных уравнений, вполне определяющих оскулирующие элементы.

§ 6. Уравнения Эйлера

Рассмотрим случай, когда за элементы $e_1, \ldots, e_6$, рассматривавшиеся нами в предыдущем параграфе, приняты обычные кеплеровы элементы a, e, i, Ω, ω, M_0.

Здесь мы можем непосредственно использовать хорошо известные интегралы задачи двух тел, изученные в гл. III. Производство выкладок разделим на следующие этапы.

1. *Параметр, долгота узла и наклон орбиты.* За соотношение (5.4) примем каждый из интегралов площадей:

$$k\sqrt{p} \sin i \sin \Omega = y\dot{z} - z\dot{y},$$

$$k\sqrt{p} \sin i \cos \Omega = x\dot{z} - z\dot{x},$$

$$k\sqrt{p} \cos i = x\dot{y} - y\dot{x}.$$

Применение к ним операции перехода от (5.4) к (5.7) дает

$$\frac{1}{2p}\sin i\sin\Omega\frac{dp}{dt}+\sin i\cos\Omega\frac{d\Omega}{dt}+\cos i\sin\Omega\frac{di}{dt}=yF'_z-zF'_y,$$

$$\frac{1}{2p}\sin i\cos\Omega\frac{dp}{dt}-\sin i\sin\Omega\frac{d\Omega}{dt}+\cos i\cos\Omega\frac{di}{dt}=xF'_z-zF'_x,$$

$$\frac{1}{2p}\cos i\frac{dp}{dt}\qquad\qquad-\sin i\frac{di}{dt}=xF'_y-yF'_x,$$

где для краткости положено

$$F'_x=\frac{1}{k\sqrt{p}}F_x;\quad F'_y=\frac{1}{k\sqrt{p}}F_y;\quad F'_z=\frac{1}{k\sqrt{p}}F_z. \tag{6.1}$$

Так как

$$\left.\begin{aligned}x&=r(\cos u\cos\Omega-\sin u\sin\Omega\cos i),\\ y&=r(\cos u\sin\Omega+\sin u\cos\Omega\cos i),\\ z&=r\sin u\sin i,\end{aligned}\right\} \tag{6.2}$$

то из этих уравнений получаем

$$\begin{aligned}\frac{dp}{dt}&=2pr\,[F'_x(-\sin u\cos\Omega-\cos u\sin\Omega\cos i)+\\ &\qquad+F'_y(-\sin u\sin\Omega+\cos u\cos\Omega\cos i)+F'_z\cos u\sin i],\\ \sin i\frac{d\Omega}{dt}&=r\sin u\,[F'_x\sin\Omega\sin i-F'_y\cos\Omega\sin i+F'_z\cos i],\\ \frac{di}{dt}&=r\cos u\,[F'_x\sin\Omega\sin i-F'_y\cos\Omega\sin i+F'_z\cos i].\end{aligned}$$

Чтобы написать эти уравнения проще, введем в рассмотрение компоненты возмущающего ускорения по радиусу-вектору, по перпендикуляру к радиусу-вектору в плоскости орбиты, образующему с направлением движения угол, меньший 90°, и по нормали к плоскости орбиты. Обозначив эти компоненты соответственно через S, T, W и положив, аналогично (6.1),

$$S'=\frac{1}{k\sqrt{p}}S;\quad T'=\frac{1}{k\sqrt{p}}T;\quad W'=\frac{1}{k\sqrt{p}}W, \tag{6.3}$$

получим такие зависимости:

$$\left.\begin{aligned}S'&=F'_x(\cos u\cos\Omega-\sin u\sin\Omega\cos i)+\\ &\qquad+F'_y(\cos u\sin\Omega+\sin u\cos\Omega\cos i)+F'_z\sin u\sin i,\\ T'&=F'_x(-\sin u\cos\Omega-\cos u\sin\Omega\cos i)+\\ &\qquad+F'_y(-\sin u\sin\Omega+\cos u\cos\Omega\cos i)+F'_z\cos u\sin i,\\ W'&=F'_x\sin\Omega\sin i-F'_y\cos\Omega\sin i+F'_z\cos i.\end{aligned}\right\} \tag{6.4}$$

В самом деле, коэффициенты F'_x, F'_y, F'_z в выражении S' равны, очевидно, величинам x/r, y/r, z/r, определяемым (6.2); что же касается соответствующих коэффициентов в выражении T', то они получаются из этих величин заменой u через $u+90°$.

Подстановка выражений (6.4) в полученные уравнения позволяет написать их следующим образом:

$$\frac{dp}{dt}=2prT', \tag{6.5}$$

$$\sin i\frac{d\Omega}{dt}=r\sin uW', \tag{6.6}$$

$$\frac{di}{dt}=r\cos uW'. \tag{6.7}$$

2. *Большая полуось и эксцентриситет.* Применение указанной операции к интегралу энергии

$$k^2(2r^{-1}-a^{-1})=\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2$$

дает

$$k^2a^{-2}\frac{da}{dt}=2\dot{x}F_x+2\dot{y}F_y+2\dot{z}F_z.$$

С другой стороны, если дифференцировать равенства (6.2) с учетом свойств оскулирующих элементов, то будем иметь

$$\left.\begin{aligned}\dot{x}&=\dot{r}x/r+\dot{v}r(-\sin u\cos\Omega-\cos u\sin\Omega\cos i),\\ \dot{y}&=\dot{r}y/r+\dot{v}r(-\sin u\sin\Omega+\cos u\cos\Omega\cos i),\\ \dot{z}&=\dot{r}z/r+\dot{v}r\cos u\sin i,\end{aligned}\right\} \tag{6.8}$$

где

$$\dot{r}=\frac{ke\sin v}{\sqrt{p}};\qquad \dot{v}=\frac{k\sqrt{p}}{r^2}. \tag{6.9}$$

Принимая все это во внимание и используя соотношения (6.4), окончательно получим

$$\frac{da}{dt}=2a^2e\sin vS'+2a^2pr^{-1}T'. \tag{6.10}$$

Дифференцирование равенства

$$p=a(1-e^2)$$

дает

$$2ae\frac{de}{dt}=(1-e^2)\frac{da}{dt}-\frac{dp}{dt}.$$

Подставив сюда (6.5) и воспользовавшись соотношениями

$$r=a(1-e\cos E);\qquad pr^{-1}=1+e\cos v, \tag{6.11}$$

получим

$$\frac{de}{dt} = p \sin v S' + p(\cos v + \cos E) T'. \tag{6.12}$$

3. *Аргумент перигелия.* Первые два из соотношений (6.2) дают

$$r \cos u = x \cos \Omega + y \sin \Omega,$$

где $u = v + \omega$.

Чтобы правильно применить нашу операцию к этому равенству, нужно учитывать, что истинная аномалия v, зависящая не только от x, y, z, но и от $\dot{x}$, $\dot{y}$, $\dot{z}$, не может рассматриваться здесь как координата. Ее нужно рассматривать как некоторую функцию оскулирующих элементов и времени.

Поэтому, обозначив через $\left(\frac{dv}{dt}\right)$ производную истинной аномалии, взятую только через посредство оскулирующих элементов, будем иметь

$$(-x \sin \Omega + y \cos \Omega) \frac{d\Omega}{dt} = -r \sin u \left(\frac{d\omega}{dt} + \left(\frac{dv}{dt}\right)\right).$$

Подстановка выражений (6.2) дает

$$\frac{d\omega}{dt} = -\left(\frac{dv}{dt}\right) - \cos i \frac{d\Omega}{dt}.$$

Чтобы найти $\left(\frac{dv}{dt}\right)$, обратимся к первому из соотношеиий (6.9), которое напишем так:

$$\dot{r} \operatorname{ctg} v = \frac{k}{\sqrt{p}} e \cos v,$$

или

$$(x\dot{x} + y\dot{y} + z\dot{z}) \operatorname{ctg} v = k\sqrt{p} - \frac{kr}{\sqrt{p}},$$

если учесть (6.11) и равеиство

$$r\dot{r} = x\dot{x} + y\dot{y} + z\dot{z}.$$

Применение к подготовленному таким образом соотношению нашей операции дает

$$S \operatorname{ctg} v - \frac{\dot{r}}{\sin^2 v}\left(\frac{dv}{dt}\right) = \frac{k}{2r\sqrt{p}}\left(1 + \frac{r}{p}\right)\frac{dp}{dt}.$$

Отсюда, пользуясь (6.5), получим

$$e\left(\frac{dv}{dt}\right) = p \cos v S' - (r + p) \sin v T'.$$

Таким образом, окончательно имеем

$$e \frac{d\omega}{dt} = -p \cos v S' + (r + p) \sin v T' - e \cos i \frac{d\Omega}{dt}. \tag{6.13}$$

4. *Средняя аномалия эпохи.* Эксцентрическая и средняя аномалии зависят от времени как непосредственно, так и через посредство оскулирующих элементов. Обозначим через $\left(\frac{dE}{dt}\right)$ и $\left(\frac{dM}{dt}\right)$ производные, взятые через посредство оскулирующих элементов. В таком случае, равенства

$$M = E - e\sin E, \quad r = a(1 - e\cos E)$$

дадут

$$\left(\frac{dM}{dt}\right) = (1 - e\cos E)\left(\frac{dE}{dt}\right) - \sin E\frac{de}{dt},$$

$$\frac{r}{a}\frac{da}{dt} - a\cos E\frac{de}{dt} + ae\sin E\left(\frac{dE}{dt}\right) = 0.$$

Исключим отсюда $\left(\frac{dE}{dt}\right)$ и в полученное равенство, представленное в форме $\frac{e}{\sqrt{1-e^2}}\left(\frac{dM}{dt}\right) = \operatorname{ctg} v\frac{de}{dt} - \frac{r}{a^2\sin v}\frac{da}{dt}$, подставим значения (6.10) и (6.12). Это даст:

$$\frac{e}{\sqrt{1-e^2}}\left(\frac{dM}{dt}\right) = (p\cos v - 2er)S' + \\ + \frac{p}{\sin v}(\cos^2 v + \cos v\cos E - 2)T'.$$

Коэффициент при T' прииимает иеопределеиный вид, если $v = 0$. Чтобы избежать этого неудобства, исключим эксцентрическую аномалию. Почленное перемножение равенств (6.11) дает

$$\cos E = \frac{e + \cos v}{1 + e\cos v}.$$

Следовательно,

$$\cos v\cos E = \frac{e\cos v + 1 - \sin^2 v}{1 + e\cos v} = 1 - \frac{r}{p}\sin^2 v.$$

Воспользовавшись этим соотношением, получим

$$\left(\frac{dM}{dt}\right) = \frac{\sqrt{1-e^2}}{e}[(p\cos v - 2er)S' - (r + p)\sin vT']. \quad (6.14)$$

Обратимся теперь к равенству

$$M = M_0 + n(t - t_0). \quad (6.15)$$

Дифференцирование его по времени дает

$$\frac{dM}{dt} = \frac{dM_0}{dt} + (t - t_0)\frac{dn}{dt} + n.$$

Если же диффереицировать только через посредство оскулирующих элементов, получим

$$\left(\frac{dM}{dt}\right) = \frac{dM_0}{dt} + (t - t_0)\frac{dn}{dt}. \quad (6.16)$$

Таким образом,

$$\frac{dM}{dt}=\left(\frac{dM}{dt}\right)+n.$$

Проинтегрировав последнее равенство от t_0 до t, будем иметь

$$M(t)=M(t_0)+\int_{t_0}^{t}\left(\frac{dM}{dt}\right)dt+\int_{t_0}^{t}n\,dt. \tag{6.17}$$

Среднюю аномалию возмущенного движения мы можем, следовательно, вычислять как по формуле (6.15), так и по формуле (6.17). Входящий в эти формулы оскулирующий элемент $n(t)$ дается равенством

$$n=ka^{-3/2}.$$

Но иногда бывает удобнее пользоваться дифференциальным уравнением, дающим этот элемент непосредственно.

Так как

$$\frac{dn}{dt}=-\frac{3}{2}\frac{k}{a^2\sqrt{a}}\frac{da}{dt}=-\frac{3}{2}\frac{n}{a}\frac{da}{dt},$$

то это уравнение имеет вид

$$\frac{dn}{dt}=-3nae\sin vS'-3napr^{-1}T'. \tag{6.18}$$

Элемент $M_0(t)$, входящий в формулу (6.15), дается, как показывает равенство (6.16), уравнением

$$\frac{dM_0}{dt}=\left(\frac{dM}{dt}\right)-(t-t_0)\frac{dn}{dt},$$

где в правую часть должны быть подставлены выражения (6.14) и (6.18).

Это уравнение существенно отличается от всех остальных. Вследствие наличия множителя $t-t_0$, его правая часть может принимать большие значения, как бы малы ни были возмущающие ускорения. Применение способа последовательных приближений (§ 2) может сделаться затруднительным или даже невозможным.

Употребление формулы (6.17) свободно от этого недостатка. Введя новый элемент $\overline{M}_0(t)$, определяемый равенством

$$\overline{M}_0=M(t_0)+\int_{t_0}^{t}\left(\frac{dM}{dt}\right)dt, \tag{6.19}$$

формулу (6.17) можно написать так:

$$M=\overline{M}_0+\int_{t_0}^{t}n\,dt. \tag{6.20}$$

Для нахождения нового элемента $\overline{M}_0$ служит дифференциальное уравнение

$$\frac{d\overline{M}_0}{dt} = \frac{\sqrt{1-e^2}}{e}[(p\cos v - 2er)S' - (r+p)\sin vT'], \qquad (6.21)$$

являющееся следствием соотношений (6.19) и (6.14).

Так как на практике пользуются всегда соотношениями (6.20) и (6.21), то можно вместо $\overline{M}_0$ писать просто M_0. Поскольку формула (6.15) в теории возмущенного движения не употребляется, это не может привести к недоразумениям.

Итак, задача нахождения оскулирующих элементов приводится к решению системы дифференциальных уравнений:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{da}{dt} &= 2a^2(e\sin vS' + pr^{-1}T'),\\
\frac{de}{dt} &= p\sin vS' + p(\cos v + \cos E)T',\\
\frac{di}{dt} &= r\cos uW',\\
\frac{d\Omega}{dt} &= r\sin u \operatorname{cosec} iW',\\
\frac{d\omega}{dt} &= \frac{1}{e}[-p\cos vS' + (r+p)\sin vT'] - \cos i\frac{d\Omega}{dt},\\
\frac{dM_0}{dt} &= \frac{\sqrt{1-e^2}}{e}[(p\cos v - 2er)S' - (r+p)\sin vT'].
\end{aligned}\right\} \qquad (6.22)$$

Когда эта система решена, средняя аномалия M вычисляется по формулам

$$n = ka^{-3/2}; \quad M = M_0 + \int_{t_0}^{t} n\,dt, \qquad (6.23)$$

после чего координаты тела P находятся по обычным формулам эллиптического движения.

Уравнения (6.22), устанавливающие зависимость между оскулирующими элементами, их производными и компонентами возмущающего ускорения, будем называть *уравнениями Эйлера*. Для такого названия имеются гораздо более веские основания, нежели для употребляемого иногда наименования их уравнениями Гаусса (см. § 16).

§ 7. Другие формы уравнений Эйлера

Если наклон орбиты мал, то вместо элементов ω и M_0 удобнее пользоваться другими.

Вместо ω введем долготу перигелия π, определяемую равенством

$$\pi = \Omega + \omega. \qquad (7.1)$$