Для нахождения нового элемента $\overline{M}_0$ служит дифференциальное уравнение

$$\frac{d\overline{M}_0}{dt}=\frac{\sqrt{1-e^2}}{e}[(p\cos v-2er)S'-(r+p)\sin vT'], \tag{6.21}$$

являющееся следствием соотношений (6.19) и (6.14).

Так как на практике пользуются всегда соотношениями (6.20) и (6.21), то можно вместо $\overline{M}_0$ писать просто M_0. Поскольку формула (6.15) в теории возмущенного движения не употребляется, это не может привести к недоразумениям.

Итак, задача нахождения оскулирующих элементов приводится к решению системы дифференциальных уравнений:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{da}{dt}&=2a^2(e\sin vS'+pr^{-1}T'),\\
\frac{de}{dt}&=p\sin vS'+p(\cos v+\cos E)T',\\
\frac{di}{dt}&=r\cos uW',\\
\frac{d\Omega}{dt}&=r\sin u\operatorname{cosec} iW',\\
\frac{d\omega}{dt}&=\frac{1}{e}[-p\cos vS'+(r+p)\sin vT']-\cos i\frac{d\Omega}{dt},\\
\frac{dM_0}{dt}&=\frac{\sqrt{1-e^2}}{e}[(p\cos v-2er)S'-(r+p)\sin vT'].
\end{aligned}\right\} \tag{6.22}$$

Когда эта система решена, средняя аномалия M вычисляется по формулам

$$n=ka^{-3/2};\quad M=M_0+\int_{t_0}^{t}n\,dt, \tag{6.23}$$

после чего координаты тела P находятся по обычным формулам эллиптического движения.

Уравнения (6.22), устанавливающие зависимость между оскулирующими элементами, их производными и компонентами возмущающего ускорения, будем называть *уравнениями Эйлера*. Для такого названия имеются гораздо более веские основания, нежели для употребляемого иногда наименования их уравнениями Гаусса (см. § 16).

§ 7. Другие формы уравнений Эйлера

Если наклон орбиты мал, то вместо элементов ω и M_0 удобнее пользоваться другими.

Вместо ω введем долготу перигелия π, определяемую равенством

$$\pi=\Omega+\omega. \tag{7.1}$$

Соотношение (6.13) дает

$$e\frac{d\pi}{dt}=2e\sin^2\frac{i}{2}\frac{d\Omega}{dt}-p\cos vS'+(r+p)\sin vT' \qquad (7.2)$$

или, учитывая (6.6),

$$e\frac{d\pi}{dt}=e\operatorname{tg}\frac{i}{2}r\sin uW'-p\cos vS'+(r+p)\sin vT'. \qquad (7.3)$$

Введем, далее, среднюю долготу в орбите λ, определяемую равенством

$$\lambda=\pi+M=\Omega+\omega+M$$

и обычно называемую просто средней долготой.

На основании (6.23) имеем

$$\lambda=\varepsilon+\int_{t_0}^{t} n\,dt, \qquad (7.4)$$

где

$$\varepsilon=\pi+M_0 \qquad (7.5)$$

есть средняя долгота эпохи.

Соотношения (6.21) и (7.3) дают

$$\frac{d\varepsilon}{dt}=\operatorname{tg}\frac{i}{2}r\sin uW'-2\sqrt{1-e^2}\,rS'+$$

$$+\frac{e}{1+\sqrt{1-e^2}}\left[-p\cos vS'+(r+p)\sin vT'\right]. \qquad (7.6)$$

Таким образом, заменив в системе (6.22) два последних уравнения на (7.3) и (7.6), мы устраним все трудности, связанные с малостью величины i. Только в уравнении для Ω останется в знаменателе малая величина $\sin i$, но это не создает действительных трудностей. В самом деле, при вычислении координат x, y, z долгота узла встречается лишь в виде выражений

$$\sin i\sin\Omega;\qquad \sin i\cos\Omega,$$

как мы уже видели раньше (§ 9 гл. IV).

Если эксцентриситет e очень мал, то правые части двух последних из уравнений (6.22) будут иметь малые делители. Однако замена этих уравнений уравнениями (7.3) и (7.6) практически уничтожает возникающие отсюда трудности. Действительно, остающийся в уравнении (7.3) малый делитель e не снижает точность, с которой получаются координаты x, y, z. Чтобы убедиться в этом, нужно только заметить, что истинная долгота в орбите

$$w=\pi+v$$

и радиус-вектор r выражаются через среднюю долготу λ следующим образом (§§ 5 и 6 гл. VI)

$$w = \lambda + 2e\sin(\lambda - \pi) + \frac{5}{4}e^2\sin 2(\lambda - \pi) + \ldots,$$

$$\frac{r}{a} = 1 + \frac{1}{2}e^2 - e\cos(\lambda - \pi) - \frac{1}{2}e^2\cos 2(\lambda - \pi) + \ldots$$

Отсюда ясно, что положение светила зависит, по существу, не от π, а от

$$e\sin\pi; \quad e\cos\pi; \quad e^2\sin 2\pi; \ldots$$

В тех случаях, когда желательно совсем избавиться от малого делителя, можно вместо переменных e и π пользоваться элементами Лагранжа:

$$h = e\sin\pi; \qquad k = e\cos\pi.$$

Точно так же, чтобы избавиться от малого делителя $\sin i$ в четвертом из уравнений (6.22), можно вместо i и Ω ввести элементы Лагранжа:

$$p = \operatorname{tg} i \sin\Omega; \qquad q = \operatorname{tg} i\cos\Omega.$$

Примечание. В некоторых случаях может оказаться более удобным вместо компонент S и T возмущающего ускорения рассматривать компоненты, направленные по касательной и по нормали. Это имеет место, например, при изучении возмущений, вызываемых сопротивлением среды.

Обозначим через $\mathfrak{T}$ компоненту возмущающего ускорения по направлению касательной, считаемую положительной, когда она действует в сторону движения; через $\mathfrak{N}$ обозначим компоненту по нормали, считаемую положительной, когда она направлена в сторону вогнутости траектории.

Легко убедиться, что

$$S(1 + 2e\cos v + e^2)^{1/2} = e\sin v\mathfrak{T} - (1 + e\cos v)\mathfrak{N},$$
$$T(1 + 2e\cos v + e^2)^{1/2} = (1 + e\cos v)\mathfrak{T} + e\sin v\mathfrak{N}.$$

Пользуясь этими соотношениями, легко представить два первых из уравнений (6.22), а также (7.2) и (7.6), в таком виде:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{da}{dt} &= \frac{2a(2a - r)}{rV}\mathfrak{T},\\
\frac{de}{dt} &= \frac{2(e + \cos v)}{V}\mathfrak{T} - \frac{r\sin v}{aV}\mathfrak{N},\\
\frac{d\pi}{dt} &= \frac{2\sin v}{eV}\mathfrak{T} + \frac{1}{e}\left(2 + \frac{r\cos v}{ae}\right)\mathfrak{N} + \sin^2\frac{i}{2}\frac{d\Omega}{dt},\\
\frac{d\varepsilon}{dt} &= -\frac{2\sqrt{1 - e^2}}{V}\left(\frac{e\sin v}{1 + e\cos v}\mathfrak{T} - \mathfrak{N}\right) + \frac{e^2}{1 + \sqrt{1 - e^2}}\frac{d\pi}{dt} +\\
&\qquad + 2\sqrt{1 - e^2}\sin^2\frac{i}{2}\frac{d\Omega}{dt}.
\end{aligned}\right\} \qquad (7.7)$$

Здесь через

$$V = k\left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a}\right)$$

обозначена абсолютная величина скорости.

§ 8. Уравнения Лагранжа

При выводе уравнений Эйлера мы не накладывали никаких ограничений на возмущающее ускорение F. Теперь мы обратимся к тому частному случаю, наиболее важному с точки зрения астрономических приложений, когда возмущающее ускорение вызывается силой, имеющей потенциал. В этом случае существует такая функция R, что

$$F_x = \frac{\partial R}{\partial x}; \quad F_y = \frac{\partial R}{\partial y}; \quad F_z = \frac{\partial R}{\partial z}. \tag{8.1}$$

Эту функцию R будем называть **пертурбационной функцией**, обобщая, таким образом, данное раньше определение (§ 4 гл. XIV).

Покажем, что уравнения Эйлера можно преобразовать так, чтобы в них вместо компонент возмущающего ускорения входили частные производные функции R по элементам.

Для любого элемента a имеет место равенство вида

$$\frac{\partial R}{\partial a} = \frac{\partial R}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial a} + \frac{\partial R}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial a} + \frac{\partial R}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial a},$$

или, учитывая (8.1) и (6.1),

$$\frac{1}{k\sqrt{p}}\frac{\partial R}{\partial a} = F'_x\frac{\partial x}{\partial a} + F'_y\frac{\partial y}{\partial a} + F'_z\frac{\partial z}{\partial a}. \tag{8.2}$$

Чтобы выразить F'_x, F'_y, F'_z через S', T', W', можно воспользоваться соотношениями (6.4) или следующими:

$$F'_x = S'(\cos u\cos\Omega - \sin u\sin\Omega\cos i) + \\ + T'(-\sin u\cos\Omega - \cos u\sin\Omega\cos i) + W'\sin\Omega\sin i,$$

$$F'_y = S'(\cos u\sin\Omega + \sin u\cos\Omega\cos i) + \\ + T'(-\sin u\sin\Omega + \cos u\cos\Omega\cos i) - W'\cos\Omega\sin i,$$

$$F'_z = S'\sin u\sin i + T'\cos u\sin i + W'\cos i,$$

которые легко получаются тем же путем, как и соотношения (6.4).