Здесь через

$$V=k\left(\frac{2}{r}-\frac{1}{a}\right)$$

обозначена абсолютная величина скорости.

§ 8. Уравнения Лагранжа

При выводе уравнений Эйлера мы не накладывали никаких ограничений на возмущающее ускорение F. Теперь мы обратимся к тому частному случаю, наиболее важному с точки зрения астрономических приложений, когда возмущающее ускорение вызывается силой, имеющей потенциал. В этом случае существует такая функция R, что

$$F_x=\frac{\partial R}{\partial x};\qquad F_y=\frac{\partial R}{\partial y};\qquad F_z=\frac{\partial R}{\partial z}. \tag{8.1}$$

Эту функцию R будем называть **пертурбационной функцией**, обобщая, таким образом, данное раньше определение (§ 4 гл. XIV).

Покажем, что уравнения Эйлера можно преобразовать так, чтобы в них вместо компонент возмущающего ускорения входили частные производные функции R по элементам.

Для любого элемента a имеет место равенство вида

$$\frac{\partial R}{\partial a}=\frac{\partial R}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial a}+\frac{\partial R}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial a}+\frac{\partial R}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial a},$$

или, учитывая (8.1) и (6.1),

$$\frac{1}{k\sqrt{p}}\frac{\partial R}{\partial a}=F'_x\frac{\partial x}{\partial a}+F'_y\frac{\partial y}{\partial a}+F'_z\frac{\partial z}{\partial a}. \tag{8.2}$$

Чтобы выразить F'_x, F'_y, F'_z через S', T', W', можно воспользоваться соотношениями (6.4) или следующими:

$$F'_x=S'(\cos u\cos\Omega-\sin u\sin\Omega\cos i)+$$
$$+T'(-\sin u\cos\Omega-\cos u\sin\Omega\cos i)+W'\sin\Omega\sin i,$$

$$F'_y=S'(\cos u\sin\Omega+\sin u\cos\Omega\cos i)+$$
$$+T'(-\sin u\sin\Omega+\cos u\cos\Omega\cos i)-W'\cos\Omega\sin i,$$

$$F'_z=S'\sin u\sin i+T'\cos u\sin i+W'\cos i,$$

которые легко получаются тем же путем, как и соотношения (6.4).

Переходим к нахождению производных x, y, z по элементам. Сначала за элементы примем a, e, i, Ω, ω, M_0. Так как

$$x = r(\cos u \cos \Omega - \sin u \sin \Omega \cos i),$$

$$y = r(\cos u \sin \Omega + \sin u \cos \Omega \cos i),$$

$$z = r \sin u \sin i,$$

где $u = v + \omega$, то производные координат по i, Ω и ω находятся сразу, так же как и производные x, y, z по промежуточным величинам r и v.

Производные r и v по a, e и M_0 даются, как легко видеть, равенствами

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial r}{\partial a} = \frac{r}{a}; && \frac{\partial v}{\partial a} = 0,\\
&\frac{\partial r}{\partial e} = -a \cos v; && \frac{\partial v}{\partial e} = \left(\frac{1}{r} + \frac{1}{p}\right) a \sin v,\\
&\frac{\partial r}{\partial M_0} = \frac{\partial r}{\partial M} = \frac{ae}{\sqrt{1-e^2}} \sin v; && \frac{\partial v}{\partial M_0} = \frac{\partial v}{\partial M} = \frac{a^2\sqrt{1-e^2}}{r^2}.
\end{aligned}\right\} \qquad (8.3)$$

Подстановка полученных выражений в формулы вида (8.2) без труда приводит к равенствам

$$\frac{\partial R}{\partial a} = k\sqrt{p}\, a^{-1} r S',$$

$$\frac{\partial R}{\partial e} = \frac{ka}{\sqrt{p}} [-p \cos v S' + (r + p) \sin v T'],$$

$$\frac{\partial R}{\partial i} = k\sqrt{p}\, r \sin u W',$$

$$\frac{\partial R}{\partial \Omega} = k\sqrt{p}\, [\cos i r T' - \sin i r \cos u W'],$$

$$\frac{\partial R}{\partial \omega} = k\sqrt{p}\, r T',$$

$$\frac{\partial R}{\partial M_0} = k a^{3/2} (e \sin v S' + p r^{-1} T').$$

Вместо константы k в эти соотношения можно ввести величину

$$n = k a^{-3/2}.$$

Тогда они примут вид

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial R}{\partial a} &= na^2\sqrt{1-e^2}\,rS',\\
\frac{\partial R}{\partial e} &= \frac{na^2}{\sqrt{1-e^2}}\left[-p\cos vS' + (r+p)\sin vT'\right],\\
\frac{\partial R}{\partial i} &= na^2\sqrt{1-e^2}\,r\sin uW',\\
\frac{\partial R}{\partial \Omega} &= na^2\sqrt{1-e^2}\,(\cos irT' - \sin ir\cos uW'),\\
\frac{\partial R}{\partial \omega} &= na^2\sqrt{1-e^2}\,rT',\\
\frac{\partial R}{\partial M_0} &= na^3(e\sin vS' + pr^{-1}T').
\end{aligned}\right\} \tag{8.4}$$

Исключение при помощи этих шести равенств трех величин S', T', W' из уравнений Эйлера выполняется практически однозначно, так как в (6.22) и (8.4) входят одинаковые комбинации исключаемых величин. Использование этих комбинаций отличается от всякого другого пути исключения S', T', W' тем, что одновременно исключаются величины r и v, зависящие явно от времени. В результате получаем уравнения:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{da}{dt} &= \frac{2}{na}\frac{\partial R}{\partial M_0},\\
\frac{de}{dt} &= \frac{1-e^2}{ena^2}\frac{\partial R}{\partial M_0} - \frac{\sqrt{1-e^2}}{ena^2}\frac{\partial R}{\partial \omega},\\
\frac{di}{dt} &= \frac{\operatorname{ctg} i}{na^2\sqrt{1-e^2}}\frac{\partial R}{\partial \omega} - \frac{\operatorname{cosec} i}{na^2\sqrt{1-e^2}}\frac{\partial R}{\partial \Omega},\\
\frac{d\Omega}{dt} &= \frac{\operatorname{cosec} i}{na^2\sqrt{1-e^2}}\frac{\partial R}{\partial i},\\
\frac{d\omega}{dt} &= \frac{\sqrt{1-e^2}}{ena^2}\frac{\partial R}{\partial e} - \frac{\operatorname{ctg} i}{na^2\sqrt{1-e^2}}\frac{\partial R}{\partial i},\\
\frac{dM_0}{dt} &= -\frac{2}{na}\frac{\partial R}{\partial a} - \frac{1-e^2}{ena^2}\frac{\partial R}{\partial e}.
\end{aligned}\right\} \tag{8.5}$$

Обратимся теперь к весьма важному для астрономии случаю, когда вместо элементов ω и M_0 употребляются элементы π и ε. Соотношения (7.1) и (7.5) показывают, что для получения соответствующих уравнений надо в уравнениях (8.5) сделать подстановку:

$$\pi = \Omega^* + \omega; \quad \varepsilon = \Omega^* + \omega + M_0; \quad \Omega = \Omega^*,$$

где через Ω^* обозначен элемент, фигурирующий в (8.5).

Эти равенства дают

$$\frac{\partial R}{\partial \Omega^*}=\frac{\partial R}{\partial \Omega}+\frac{\partial R}{\partial \pi}+\frac{\partial R}{\partial \varepsilon}; \quad \frac{\partial R}{\partial \omega}=\frac{\partial R}{\partial \pi}+\frac{\partial R}{\partial \varepsilon}; \quad \frac{\partial R}{\partial M_0}=\frac{\partial R}{\partial \varepsilon}.$$

Подставив все эти выражения в (8.5), получим следующие уравнения:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{da}{dt}&=\frac{2}{na}\frac{\partial R}{\partial \varepsilon},\\
\frac{de}{dt}&=-\frac{\sqrt{1-e^2}}{ena^2}\frac{\partial R}{\partial \pi}-\frac{e\sqrt{1-e^2}}{1+\sqrt{1-e^2}}\frac{1}{na^2}\frac{\partial R}{\partial \varepsilon},\\
\frac{di}{dt}&=\frac{-\operatorname{cosec} i}{na^2\sqrt{1-e^2}}\frac{\partial R}{\partial \Omega}-\frac{\operatorname{tg}\frac{i}{2}}{na^2\sqrt{1-e^2}}\left(\frac{\partial R}{\partial \pi}+\frac{\partial R}{\partial \varepsilon}\right),\\
\frac{d\Omega}{dt}&=\frac{\operatorname{cosec} i}{na^2\sqrt{1-e^2}}\frac{\partial R}{\partial i},\\
\frac{d\pi}{dt}&=\frac{\operatorname{tg}\frac{i}{2}}{na^2\sqrt{1-e^2}}\frac{\partial R}{\partial i}+\frac{\sqrt{1-e^2}}{ena^2}\frac{\partial R}{\partial e},\\
\frac{d\varepsilon}{dt}&=-\frac{2}{na}\frac{\partial R}{\partial a}+\frac{\operatorname{tg}\frac{i}{2}}{na^2\sqrt{1-e^2}}\frac{\partial R}{\partial i}+\frac{e\sqrt{1-e^2}}{1+\sqrt{1-e^2}}\frac{1}{na^2}\frac{\partial R}{\partial e}.
\end{aligned}\right\} \quad (8.6)$$

После того как решение этой системы даст оскулирующие элементы $a, e, \ldots, \varepsilon$, вычисление координат тела P производится по формулам:

$$\left.\begin{aligned}
&\lambda=\varepsilon+\int_{t_0}^{t} n\,dt; \quad E-e\sin E=\lambda-\pi,\\
&r=a(1-e\cos E); \quad \operatorname{tg}\frac{v}{2}=\sqrt{\frac{1+e}{1-e}}\operatorname{tg}\frac{E}{2},\\
&u=v+\pi-\Omega,\\
&x=r(\cos u\cos\Omega-\sin u\sin\Omega\cos i),\\
&y=r(\cos u\sin\Omega+\sin u\cos\Omega\cos i),\\
&z=r\sin u\sin i.
\end{aligned}\right\} \quad (8.7)$$

Уравнения (8.6), а также эквивалентные им уравиения (8.5), мы будем называть уравнениями Лагранжа.

Полезно отметить следующие свойства уравнений Лагранжа:

1. Время входит в эти уравнения только через посредство производных пертурбационной функции R.

2. Элементы орбиты разделяются на две группы: к одной относятся a, e, i, к другой Ω, π, ε. Дифференциальные уравнения

для элементов одной из этих групп содержат частные производные R только по элементам другой группы.

3. Обозначим через α и β два элемента, принадлежащие различным группам. Если уравнение для $d\alpha/dt$ содержит $\partial R/\partial\beta$, то уравнение для $d\beta/dt$ содержит $\partial R/\partial\alpha$, причем коэффициенты $\partial R/\partial\alpha$ и $\partial R/\partial\beta$ в этих уравнениях равны по величине и противоположны по знаку.

Примечание. Пертурбационная функция R выражается через элементы $a, e, \ldots, \varepsilon$ при помощи формул (8.7). Важно помнить, что при вычислении производной $\partial R/\partial a$, входящей в уравнения (8.5) и (8.6), дифференцирование должно производиться только по тому a, которое фигурирует в равенствах (8.7) явно. Зависимость r, x, y, z от a через посредство величины

$$n = ka^{-3/2} \tag{8.8}$$

при этом не учитывается. Именно так были получены равенства (8.3), лежащие в основе вывода уравнений (8.5) и (8.6).

Такой способ дифференцирования был введен (§ 6) для того, чтобы избежать появления множителя t в правых частях уравнений. Освобождение от этого множителя получается за счет введения квадратуры, фигурирующей в формулах (8.7).

Положив

$$\rho = \int_0^t n\,dt$$

и использовав (8.8), будем иметь

$$\frac{d^2\rho}{dt^2} = \frac{dn}{dt} = -\frac{3}{2}\frac{n}{a}\frac{da}{dt}.$$

Таким образом, для вычисления средней долготы можно пользоваться формулами

$$\lambda = \varepsilon + \rho; \qquad \frac{d^2\rho}{dt^2} = -\frac{3}{a^2}\frac{\partial R}{\partial \varepsilon}, \tag{8.9}$$

широко применяемыми при изучении движения планет.

§ 9. Специальные формы уравнений Лагранжа

Если эксцентриситет e близок к нулю, то у некоторых из коэффициентов в правых частях уравнений Лагранжа появляется малый делитель.

Это имеет место, прежде всего, во вторых уравнениях каждой из систем (8.5) и (8.6). Здесь, впрочем, это не вызывает никаких осложнений. Достаточно принять за неизвестную величину квадрат эксцентриситета, чтобы малый делитель исчез.