для элементов одной из этих групп содержат частные производные R только по элементам другой группы.

3. Обозначим через α и β два элемента, принадлежащие различным группам. Если уравнение для $d\alpha/dt$ содержит $\partial R/\partial\beta$, то уравнение для $d\beta/dt$ содержит $\partial R/\partial\alpha$, причем коэффициенты $\partial R/\partial\alpha$ и $\partial R/\partial\beta$ в этих уравнениях равны по величине и противоположны по знаку.

Примечание. Пертурбационная функция R выражается через элементы $a, e, \ldots, \varepsilon$ при помощи формул (8.7). Важно помнить, что при вычислении производной $\partial R/\partial a$, входящей в уравнения (8.5) и (8.6), дифференцирование должно производиться только по тому a, которое фигурирует в равенствах (8.7) явно. Зависимость r, x, y, z от a через посредство величины

$$n = ka^{-3/2} \tag{8.8}$$

при этом не учитывается. Именно так были получены равенства (8.3), лежащие в основе вывода уравнений (8.5) и (8.6).

Такой способ дифференцирования был введен (§ 6) для того, чтобы избежать появления множителя t в правых частях уравнений. Освобождение от этого множителя получается за счет введения квадратуры, фигурирующей в формулах (8.7).

Положив

$$\rho = \int_0^t n\,dt$$

и использовав (8.8), будем иметь

$$\frac{d^2\rho}{dt^2} = \frac{dn}{dt} = -\frac{3}{2}\frac{n}{a}\frac{da}{dt}.$$

Таким образом, для вычисления средней долготы можно пользоваться формулами

$$\lambda = \varepsilon + \rho; \qquad \frac{d^2\rho}{dt^2} = -\frac{3}{a^2}\frac{\partial R}{\partial \varepsilon}, \tag{8.9}$$

широко применяемыми при изучении движения планет.

§ 9. Специальные формы уравнений Лагранжа

Если эксцентриситет e близок к нулю, то у некоторых из коэффициентов в правых частях уравнений Лагранжа появляется малый делитель.

Это имеет место, прежде всего, во вторых уравнениях каждой из систем (8.5) и (8.6). Здесь, впрочем, это не вызывает никаких осложнений. Достаточно принять за неизвестную величину квадрат эксцентриситета, чтобы малый делитель исчез.

Несколько сложнее обстоит дело с предпоследним уравнением в каждой из этих систем, а именно, уравнением, дающим $d\pi/dt$. Здесь малый делитель неустраним. Он является следствием того, что долгота перигелия становится неопределенной, если эксцентриситет стремится к нулю. Но, как мы уже видели (§ 7), возникающая от этого делителя неточность в величине π не отражается на точности, с какой получаются координаты планеты.

В некоторых специальных вопросах может оказаться целесообразным заменить элементы e и π другими, находимыми с одинаковой точностью, как бы мал ни был эксцентриситет орбиты. Таким свойством обладают, например, элементы

$$h = e\sin\pi; \quad k = e\cos\pi, \tag{9.1}$$

введенные Лагранжем при изучении вековых возмущений планет.

Так как

$$\frac{dh}{dt} = \sin\pi\frac{de}{dt} + k\frac{d\pi}{dt}; \quad \frac{dk}{dt} = \cos\pi\frac{de}{dt} - h\frac{d\pi}{dt},$$

то, пользуясь уравнениями (8.6) и замечая, что

$$\frac{\partial R}{\partial e} = \sin\pi\frac{\partial R}{\partial h} + \cos\pi\frac{\partial R}{\partial k}; \quad \frac{\partial R}{\partial \pi} = k\frac{\partial R}{\partial h} - h\frac{\partial R}{\partial k},$$

получим

$$\left.\begin{aligned}\frac{dh}{dt} &= \frac{\sqrt{1-e^2}}{na^2}\left(\frac{\partial R}{\partial k} - \frac{h}{1+\sqrt{1-e^2}}\frac{\partial R}{\partial \varepsilon}\right) + \frac{k\operatorname{tg}\frac{i}{2}}{na^2\sqrt{1-e^2}}\frac{\partial R}{\partial i},\\ \frac{dk}{dt} &= \frac{\sqrt{1-e^2}}{na^2}\left(-\frac{\partial R}{\partial h} - \frac{k}{1+\sqrt{1-e^2}}\frac{\partial R}{\partial \varepsilon}\right) - \frac{h\operatorname{tg}\frac{i}{2}}{na^2\sqrt{1-e^2}}\frac{\partial R}{\partial i},\end{aligned}\right\} \tag{9.2}$$

где

$$e^2 = h^2 + k^2.$$

Заменив этими уравнениями второе и пятое из уравнений (8.6), будем иметь систему, свободную от малых делителей.

Для орбит, у которых наклон i близок к нулю, в правых частях уравнеиий для di/dt и $d\Omega/dt$ системы (8.6) появляется малый делитель $\sin i$. В дальнейшем мы убедимся, что это обстоятельство не снижает точность, с которой получаются координаты планеты. Но в некоторых случаях вместо элементов i и Ω бывает выгоднее ввести такие, для которых уравнения свободны от указанного недостатка. Можно взять, например, элементы

$$p = \operatorname{tg} i\sin\Omega; \quad q = \operatorname{tg} i\cos\Omega, \tag{9.3}$$

введенные Лагранжем и использованные им при изучении вековых возмущений планет.

Равенства (9.3) дают

$$\frac{dp}{dt} = q\frac{d\Omega}{dt} + p\sec i\operatorname{cosec} i\frac{di}{dt},$$
$$\frac{dq}{dt} = -p\frac{d\Omega}{dt} + q\sec i\operatorname{cosec} i\frac{di}{dt},$$
$$\frac{\partial R}{\partial i} = \sec i\operatorname{cosec} i\left(p\frac{\partial R}{\partial p} + q\frac{\partial R}{\partial q}\right),$$
$$\frac{\partial R}{\partial \Omega} = q\frac{\partial R}{\partial p} - p\frac{\partial R}{\partial q}.$$

Поэтому, учитывая (8.6), окончательно будем иметь такие уравиеиия:

$$\left.\begin{aligned}\frac{dp}{dt} &= \frac{\sec^3 i}{na^2\sqrt{1-e^2}}\frac{\partial R}{\partial q} - \frac{p\sec i\sec^2\frac{i}{2}}{2na^2\sqrt{1-e^2}}\left(\frac{\partial R}{\partial \pi} + \frac{\partial R}{\partial \varepsilon}\right),\\ \frac{dq}{dt} &= \frac{-\sec^3 i}{na^2\sqrt{1-e^2}}\frac{\partial R}{\partial p} - \frac{q\sec i\sec^2\frac{i}{2}}{2na^2\sqrt{1-e^2}}\left(\frac{\partial R}{\partial \pi} + \frac{\partial R}{\partial \varepsilon}\right).\end{aligned}\right\} \quad (9.4)$$

Так как

$$\sec i = (1 + p^2 + q^2)^{1/2},$$
$$\frac{1}{2}\sec^2\frac{i}{2} = 1/\left[1 + (1 + p^2 + q^2)^{-1/2}\right],$$

то коэффициенты уравнений (9.4) легко могут быть выражеиы через новые элементы p и q.

§ 10. Возмущенное движение планет

Уравнения Лагранжа были широко использованы в работах Леверрье и Гайо (§ 2 гл. II) для изучения возмущенного движения планет.

Для сокращения письма будем предполагать, что имеются только две планеты. Массы их обозначим через m и m', а элементы через $a, e, \ldots$ и $a', e', \ldots$

Сказаниое в предыдущих параграфах показывает, что движение рассматриваемых планет относительно Солица будет известно, если будет решена следующая система двенадцатого порядка:

$$\left.\begin{aligned}&\frac{da}{dt} = \frac{2}{na}\frac{\partial R}{\partial \varepsilon};\ \ldots,\quad \frac{d\Omega}{dt} = \frac{\operatorname{cosec} i}{na^2\sqrt{1-e^2}}\frac{\partial R}{\partial i};\ \ldots,\\ &\frac{da'}{dt} = \frac{2}{n'a'}\frac{\partial R'}{\partial \varepsilon'};\ \ldots,\quad \frac{d\Omega'}{dt} = \frac{\operatorname{cosec} i'}{n'a'^2\sqrt{1-e'^2}}\frac{\partial R'}{\partial i'};\ \ldots\end{aligned}\right\} \quad (10.1)$$