введенные Лагранжем и использованные им при изучении вековых возмущений планет.

Равенства (9.3) дают

$$\frac{dp}{dt} = q\frac{d\Omega}{dt} + p\sec i \operatorname{cosec} i \frac{di}{dt},$$
$$\frac{dq}{dt} = -p\frac{d\Omega}{dt} + q\sec i \operatorname{cosec} i \frac{di}{dt},$$
$$\frac{\partial R}{\partial i} = \sec i \operatorname{cosec} i\left(p\frac{\partial R}{\partial p} + q\frac{\partial R}{\partial q}\right),$$
$$\frac{\partial R}{\partial \Omega} = q\frac{\partial R}{\partial p} - p\frac{\partial R}{\partial q}.$$

Поэтому, учитывая (8.6), окончательно будем иметь такие уравиеиия:

$$\left.\begin{aligned}\frac{dp}{dt} &= \frac{\sec^3 i}{na^2\sqrt{1-e^2}}\frac{\partial R}{\partial q} - \frac{p\sec i\sec^2\frac{i}{2}}{2na^2\sqrt{1-e^2}}\left(\frac{\partial R}{\partial \pi} + \frac{\partial R}{\partial \varepsilon}\right),\\ \frac{dq}{dt} &= \frac{-\sec^3 i}{na^2\sqrt{1-e^2}}\frac{\partial R}{\partial p} - \frac{q\sec i\sec^2\frac{i}{2}}{2na^2\sqrt{1-e^2}}\left(\frac{\partial R}{\partial \pi} + \frac{\partial R}{\partial \varepsilon}\right).\end{aligned}\right\} \quad (9.4)$$

Так как

$$\sec i = (1 + p^2 + q^2)^{1/2},$$
$$\frac{1}{2}\sec^2\frac{i}{2} = 1/\left[1 + (1 + p^2 + q^2)^{-1/2}\right],$$

то коэффициенты уравнений (9.4) легко могут быть выражеиы через новые элементы p и q.

§ 10. Возмущенное движение планет

Уравнения Лагранжа были широко использованы в работах Леверрье и Гайо (§ 2 гл. II) для изучения возмущенного движения планет.

Для сокращения письма будем предполагать, что имеются только две планеты. Массы их обозначим через m и m', а элементы через a, e, ... и a', e', ...

Сказаниое в предыдущих параграфах показывает, что движение рассматриваемых планет относительно Солица будет известно, если будет решена следующая система двенадцатого порядка:

$$\left.\begin{aligned}\frac{da}{dt} &= \frac{2}{na}\frac{\partial R}{\partial \varepsilon};\ \ldots,\quad \frac{d\Omega}{dt} = \frac{\operatorname{cosec} i}{na^2\sqrt{1-e^2}}\frac{\partial R}{\partial i};\ \ldots,\\ \frac{da'}{dt} &= \frac{2}{n'a'}\frac{\partial R'}{\partial \varepsilon'};\ \ldots,\quad \frac{d\Omega'}{dt} = \frac{\operatorname{cosec} i'}{n'a'^2\sqrt{1-e'^2}}\frac{\partial R'}{\partial i'};\ \ldots\end{aligned}\right\} \quad (10.1)$$

Входящие сюда пертурбационные функции даются равенствами (§ 4 гл. XIV):

$$\left.\begin{aligned} R &= k^2 m'\left(\frac{1}{\Delta} - \frac{xx' + yy' + zz'}{r'^3}\right), \\ R' &= k^2 m\left(\frac{1}{\Delta} - \frac{xx' + yy' + zz'}{r^3}\right), \end{aligned}\right\} \tag{10.2}$$

где

$$\Delta = \left[(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2\right]^{1/2}.$$

Координаты планет выражаются через время t и элементы формулами (8.7) и им аналогичными для другой планеты.

Легко видеть, что R и R' зависят только от взаимного расположения орбит, но не от их положения относительно основной координатной плоскости. В самом деле, если угол между радиусами-векторами r и r' обозначить через H, то

$$R = k^2 m'\left(\frac{1}{\Delta} - \frac{r\cos H}{r'^2}\right); \quad R' = k^2 m\left(\frac{1}{\Delta} - \frac{r'\cos H}{r^2}\right), \tag{10.3}$$

причем

$$\Delta^2 = r^2 + r'^2 - 2rr'\cos H.$$

Отсюда ясно, что R и R' зависят только от r, r' и H.

Рассмотренный нами в § 2 метод последовательных приближений, основанный здесь на малости масс m и m', позволяет получить решение системы (10.1) в форме рядов

$$\left.\begin{aligned} a &= a_0 + \delta_1 a + \delta_2 a + \ldots, \\ e &= e_0 + \delta_1 e + \delta_2 e + \ldots, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a' &= a_0' + \delta_1 a' + \delta_2 a' + \ldots, \\ e' &= e_0' + \delta_1 e' + \delta_2 e' + \ldots, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}\right\} \tag{10.4}$$

расположенных по целым положительным степеням m и m'. Через a_0, e_0, ..., a_0', e_0', ... здесь обозначены постоянные интегрирования, представляющие значения оскулирующих элементов в некоторый момент времени. Не ограничивая общности, можно считать, что это тот момент, когда $t=0$. Через $\delta_n a$, $\delta_n e$, ..., $\delta_n a'$, ... в выражениях (10.4) обозначены совокупности членов n-й степени относительно m и m'. Эти величины носят название возмущений n-го порядка.

Значения

$$a = a_0, \ e = e_0, \ \ldots, \ a' = a_0', \ \ldots,$$

получаемые из (10.4) при $m=0$, $m'=0$, подставим в правые части уравнений (10.1). Учитывая сказанное выше относительно зависимости величин R и R' от времени и элементов орбит, будем иметь

$$\frac{da}{dt} = m'f(t,\ a_0,\ e_0,\ \ldots,\ a_0',\ \ldots),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\frac{da'}{dt} = mf_1(t,\ a_0,\ e_0,\ \ldots,\ a_0',\ \ldots),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Интегрирование этих равенств дает

$$\left.\begin{array}{l} a = a_0 + m'\int\limits_0^t f(t,\ a_0,\ e_0,\ \ldots)\,dt = a_0 + \delta_1 a, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{array}\right\} \tag{10.5}$$

т. е. позволяет найти возмущения первого порядка.

Полученные в первом приближении значения элементов (10.5) подставим в правые части уравнений (10.1). Ограничиваясь членами второго порядка относительно масс, мы будем иметь уравнения вида

$$\frac{da}{dt} = m'f(t,\ a_0,\ \ldots) + m'\frac{\partial f}{\partial a_0}\delta_1 a + \ \ldots\ + m'\frac{\partial f}{\partial a_0'}\delta_1 a' + \ \ldots,$$

откуда после интегрирования получим

$$a = a_0 + \delta_1 a + \delta_2 a; \quad e = e_0 + \delta_1 e + \delta_2 e; \ \ldots,$$

т. е. найдем возмущения второго порядка. Продолжая этот процесс, мы можем получить любое число членов в разложениях (10.4).

§ 11. Классификация возмущений

Чтобы фактически выполнить интегрирования в формулах (10.5) и им аналогичных для возмущений высших порядков, необходимо пертурбационные функции (10.2) представить в виде явных функций времени. Это возможно, лишь прибегнув к разложению их в бесконечные ряды. Весьма важный для астрономических приложений вопрос о разложении пертурбационной функции в ряд мы рассмотрим подробнее потом, а сейчас ограничимся лишь немногими замечаниями.

Так как координаты каждой планеты являются периодическими функциями соответствующей средней аномалии M и M', имеющими период 2π, то пертурбационные функции R и R' являются 2π-периодическими функциями M и M'. Если орбиты рассматриваемых планет не пересекаются (так что $\Delta \neq 0$), то эти функции удовлетворяют условиям Дирихле. Следовательно, они