зависимости величин R и R' от времени и элементов орбит, будем иметь

$$\frac{da}{dt} = m' f(t, a_0, e_0, \ldots, a_0', \ldots),$$
$$\cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot$$
$$\frac{da'}{dt} = m f_1(t, a_0, e_0, \ldots, a_0', \ldots),$$
$$\cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot$$

Интегрирование этих равенств дает

$$\left.\begin{array}{l} a = a_0 + m' \int\limits_0^t f(t, a_0, e_0, \ldots)\, dt = a_0 + \delta_1 a, \\ \cdot \; \cdot \, , \end{array}\right\} \qquad (10.5)$$

т. е. позволяет найти возмущения первого порядка.

Полученные в первом приближении значения элементов (10.5) подставим в правые части уравнений (10.1). Ограничиваясь членами второго порядка относительно масс, мы будем иметь уравнения вида

$$\frac{da}{dt} = m' f(t, a_0, \ldots) + m' \frac{\partial f}{\partial a_0} \delta_1 a + \ldots + m' \frac{\partial f}{\partial a_0'} \delta_1 a' + \ldots,$$

откуда после интегрирования получим

$$a = a_0 + \delta_1 a + \delta_2 a; \quad e = e_0 + \delta_1 e + \delta_2 e; \ \ldots,$$

т. е. найдем возмущения второго порядка. Продолжая этот процесс, мы можем получить любое число членов в разложениях (10.4).

§ 11. Классификация возмущений

Чтобы фактически выполнить интегрирования в формулах (10.5) и им аналогичных для возмущений высших порядков, необходимо пертурбационные функции (10.2) представить в виде явных функций времени. Это возможно, лишь прибегнув к разложению их в бесконечные ряды. Весьма важный для астрономических приложений вопрос о разложении пертурбационной функции в ряд мы рассмотрим подробнее потом, а сейчас ограничимся лишь немногими замечаниями.

Так как координаты каждой планеты являются периодическими функциями соответствующей средней аномалии M и M', имеющими период 2π, то пертурбационные функции R и R' являются 2π-периодическими функциями M и M'. Если орбиты рассматриваемых планет не пересекаются (так что $\Delta \neq 0$), то эти функции удовлетворяют условиям Дирихле. Следовательно, они могут быть разложены в двойные ряды Фурье вида

$$R = \sum N_{j,\ j'} \cos(jM + j'M' + B_{j,\ j'}),$$
$$R' = \sum N'_{j,\ j'} \cos(jM + j'M' + B'_{j,\ j'}),$$

где j, j' — целые числа, принимающие все значения от $-\infty$ до $+\infty$.

В главе VI мы видели, что радиус-вектор и истинная аномалия разлагаются в ряды по целым положительным степеням эксцентриситета. Пользуясь этими рядами, можно показать, что коэффициенты N и N' в только что написанных рядах тоже разлагаются по целым и положительным степеням эксцентриситетов. С другой стороны, будет показано, что пертурбационная функция, а следовательно, и каждый из коэффициентов N и N' разлагаются по целым и положительным степеням величины

$$\nu = \sin^2 \frac{J}{2},$$

где через J обозначен угол между плоскостями орбит рассматриваемых планет. Таким образом, каждая из функций R и R' может быть представлена в виде пятикратной суммы выражений вида

$$\left.\begin{array}{c} Ae^{\alpha}e'^{\alpha'}\nu^{\beta}\cos(jM + j'M' + B) \\ (\alpha,\ \alpha',\ \beta = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots;\ j,\ j' = 0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \ldots), \end{array}\right\} \quad (11.1)$$

где коэффициенты A, имеющие множителем либо m', либо m, зависят только от больших полуосей a и a'. Величины B зависят только от i, i', Ω, Ω', π, π'.

Учитывая, что

$$M = nt + \varepsilon - \pi; \quad M' = n't + \varepsilon' - \pi',$$

приходим к заключению, что правые части уравнений (10.1) являются суммами членов вида

$$Ae^{\alpha}e'^{\alpha'}\nu^{\beta}\cos D, \qquad (11.2)$$

где

$$D = j(nt + \varepsilon) + j'(n't + \varepsilon') + C,$$

а C зависит от тех же элементов, что и величина B в выражении (11.1).

Представив таким путем правые части уравнений (10.1) в виде явных функций времени, мы можем перейти к вычислению возмущений различных порядков.

Подстановка выражений (11.2) в уравнения (10.5) дает возмущения первого порядка каждого элемента в виде суммы членов одного из следующих двух типов, а именно:

$$A_0 e_0^{\alpha} e_0'^{\alpha'} \nu_0^{\beta} \frac{\cos D_0}{jn_0 + j'n_0'}, \tag{11.3}$$

где

$$D_0 = j(n_0 t + \varepsilon_0) + j'(n_0' t + \varepsilon_0') + C_0,$$

если $jn_0 + j'n_0' \neq 0$, и

$$tA_0 e_0^{\alpha} e_0'^{\alpha'} \nu_0^{\beta} \cos(j\varepsilon_0 + j'\varepsilon_0' + C_0), \tag{11.4}$$

если $jn_0 + j'n_0' = 0$. Но в средней долготе будут еще, как показывают равенства (8.9), члены вида

$$A_0 e_0^{\alpha} e_0'^{\alpha'} \nu_0^{\beta} \frac{\cos D_0}{(jn_0 + j'n_0')^2}. \tag{11.5}$$

Нетрудно убедиться, что при вычислении возмущений не только первого, но и второго, третьего и всех дальнейших порядков, могут получиться лишь члены вида

$$t^p A_0 e_0^{\alpha} e_0'^{\alpha'} \nu_0^{\beta} \frac{\cos(\varkappa t + j\varepsilon_0 + j'\varepsilon_0' + C_0)}{\varkappa^q \varkappa_1^{q_1} \ldots}, \tag{11.6}$$

где

$$\varkappa = jn_0 + j'n_0'; \quad \varkappa_1 = j_1 n_0 + j_1' n_0'; \ \ldots$$

Как сумма всех полученных членов, так и каждый из членов (11.6) в отдельности называются *возмущениями* (или *неравенствами*) соответствующего элемента.

Если $p=0$, то возмущение (11.6) называется *периодическим*. Когда $p \geqslant 1$, оно называется *вековым*, если $\varkappa=0$, и *смешанным*, если $\varkappa \neq 0$.

Для оценки важности отдельных возмущений употребляется несколько характеристик.

Такой характеристикой является прежде всего *порядок возмущения*, равный сумме степеней возмущающих масс m и m', являющихся множителями, входящими в величину A_0. Чем ниже порядок, тем больше (при прочих равных условиях) влияние рассматриваемого возмущения.

Другой характеристикой служит *степень возмущения*. Так называется сумма $\alpha + \alpha' + \beta$ показателей e_0, e_0', ν_0. Если эти величины достаточно малы, то возрастание степени сопровождается значительным убыванием влияния возмущения (11.6).

Если средние движения n_0 и n_0' близки к соизмеримости, то некоторые из делителей $\varkappa$, $\varkappa_1$, ... выражения (11.6) будут очень малы. Практически приходится, как увидим ниже (§ 12), рассматривать только один такой делитель. Здесь важной характеристикой становится степень этого делителя. Мы обозначим ее через q. Чем больше q, тем больше, при прочих равных условиях, соответствующее возмущение.

Наконец, число p также может существенно влиять на величину возмущения (11.6), особенно при больших промежутках времени.

Пуанкаре показал, что наибольший интерес с точки зрения оценки важности отдельных возмущений имеют, помимо порядка n, еще две характеристики: разность $n-p$, которую он назвал рангом возмущения, и разность $n-\frac{1}{2}p-\frac{1}{2}q$, которую он назвал классом возмущения. В дальнейшем будет показано, что каждая из этих величин не может быть отрицательной.

Для не очень больших промежутков времени важнейшими являются возмущения наиболее низких порядков, прежде всего первого порядка.

Для более значительных интервалов времени величина возмущения может уже зависеть от его класса, а для очень больших интервалов времени влияние возмущения лучше всего соответствует его рангу. К этим вопросам мы еще вернемся.

Примечание. Андуайе [1926] пользовался несколько иной терминологией. Он назвал рангом возмущения степень времени p, а классом — сумму степеней $p+q$. Но эта попытка изменить введенную Пуанкаре [1905] терминологию не имела последователей.

§ 12. Периодические возмущения

При изучении движения планет приходится иметь дело главным образом с периодическими возмущениями первого порядка. Эти возмущения для всех элементов имеют, как мы видели (§ 11), такой вид:

$$Ae_0^{\alpha}e_0'^{\alpha'}\nu_0^{\beta}\,\frac{\cos(\varkappa t+E)}{\varkappa},\qquad(12.1)$$

где $\varkappa=jn_0+j'n_0'$. Но в средней долготе, вычисляемой по формулам (8.9), могут быть еще члены вида

$$Ae_0^{\alpha}e_0'^{\alpha'}\nu_0^{\beta}\,\frac{\cos(\varkappa t+E)}{\varkappa^2}.\qquad(12.2)$$

В зависимости от величины периода $2\pi/\varkappa$, рассматриваемые возмущения делятся на долгопериодические, для которых этот период во много раз превосходит периоды $2\pi/n_0$ и $2\pi/n_0'$ рассматриваемых планет, и на короткопериодические, для которых эти три периода являются величинами одного порядка.