ристикой становится степень этого делителя. Мы обозначим ее через q. Чем больше q, тем больше, при прочих равных условиях, соответствующее возмущение.

Наконец, число p также может существенно влиять на величину возмущения (11.6), особенно при больших промежутках времени.

Пуанкаре показал, что наибольший интерес с точки зрения оценки важности отдельных возмущений имеют, помимо порядка n, еще две характеристики: разность $n-p$, которую он назвал рангом возмущения, и разность $n-\frac{1}{2}p-\frac{1}{2}q$, которую он назвал классом возмущения. В дальнейшем будет показано, что каждая из этих величин не может быть отрицательной.

Для не очень больших промежутков времени важнейшими являются возмущения наиболее низких порядков, прежде всего первого порядка.

Для более значительных интервалов времени величина возмущения может уже зависеть от его класса, а для очень больших интервалов времени влияние возмущения лучше всего соответствует его рангу. К этим вопросам мы еще вернемся.

Примечание. Андуайе [1926] пользовался несколько иной терминологией. Он назвал рангом возмущения степень времени p, а классом — сумму степеней $p+q$. Но эта попытка изменить введенную Пуанкаре [1905] терминологию не имела последователей.

§ 12. Периодические возмущения

При изучении движения планет приходится иметь дело главным образом с периодическими возмущениями первого порядка. Эти возмущения для всех элементов имеют, как мы видели (§ 11), такой вид:

$$Ae_0^{\alpha}e_0'^{\alpha'}\nu_0^{\beta}\frac{\cos(\varkappa t+E)}{\varkappa}, \tag{12.1}$$

где $\varkappa=jn_0+j'n_0'$. Но в средней долготе, вычисляемой по формулам (8.9), могут быть еще члены вида

$$Ae_0^{\alpha}e_0'^{\alpha'}\nu_0^{\beta}\frac{\cos(\varkappa t+E)}{\varkappa^2}. \tag{12.2}$$

В зависимости от величины периода $2\pi/\varkappa$, рассматриваемые возмущения делятся на долгопериодические, для которых этот период во много раз превосходит периоды $2\pi/n_0$ и $2\pi/n_0'$ рассматриваемых планет, и на короткопериодические, для которых эти три периода являются величинами одного порядка.

Если период возмущения очень короткий, то частота $\varkappa$ велика, а это уменьшает амплитуду соответствующих возмущений (12.1) или (12.2).

Наоборот, для долгопериодических возмущений частота $\varkappa$ очень мала и амплитуды возмущений в элементах, а особенно в средней долготе, могут стать весьма велики. Это придает вычислению долгопериодических возмущений особую важность.

В принципе всегда существуют возмущения сколь угодно большого периода, так как всегда можно подобрать такие целые числа j и j', для которых величина $\varkappa$ сколь угодно близка к нулю. Но количество долгопериодических членов, которые приходится рассматривать, на практике оказывается весьма ограниченным вследствие некоторых свойств, присущих коэффициентам разложения пертурбационной функции в тригонометрический ряд. Мы увидим (§ 5 гл. XVII), что всегда имеет место соотношение

$$\alpha+\alpha'+\beta=|j+j'|+\text{четное число}; \tag{12.3}$$

иначе говоря, степень возмущения либо равна $|j+j'|$, либо превосходит эту величину на четное число.

Отсюда следует, что долгопериодический член может иметь заметную амплитуду лишь в том случае, когда j и j' имеют небольшие по абсолютной величине значения. Чтобы найти такие значения j и j', проще всего воспользоваться разложением отношения n_0/n_0' в цепную дробь.

С долгопериодическими возмущениями астрономам впервые пришлось встретиться при попытке объяснить движения Юпитера и Сатурна их взаимным притяжением. Если за начальный момент принять 1,0 января 1900 г., то в этом случае для Юпитера и Сатурна

$$n_0=299'',1283, \quad n_0'=120'',4547.$$

Соответствующая цепная дробь

$$\frac{n_0}{n_0'}=2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{14+\cfrac{1}{2+\dots}}}$$

дает подходящие дроби

$$\frac{2}{1}, \quad \frac{5}{2}, \quad \frac{72}{29}, \quad \frac{149}{60}, \ldots,$$

которым соответствуют делители

$$n_0-2n_0'=+58'', 2189,$$
$$2n_0-5n_0'=-4,0169,$$
$$29n_0-72n_0'=+1,9823,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Первый из этих делителей нельзя считать малым, так как он равен приблизительно $\frac{1}{5}n_0$ или $\frac{1}{2}n'_0$. Однако соответствующие ему возмущения, имеющие в силу соотношения (12.3) степени 1, 3, 5, ..., оказывают весьма заметное влияние на движение планет.

Следующий делитель $2n_0-5n'_0$, равный приблизительно $\frac{1}{75}n_0$ или $\frac{1}{30}n'_0$, уже приходится считать малым. Соответствующие ему возмущения имеют период около 880 лет и степени, равные 3, 5, 7, ... Они особенно чувствительны в долготе Сатурна, где они производят колебания с амплитудой, доходящей до 50′. Колебания в долготе Юпитера доходят до 20′.

Заметим, что долгопериодические возмущения $\delta\rho$ и $\delta\rho'$, вызываемые в средних долготах

$$\lambda=\varepsilon+\rho, \qquad \lambda'=\varepsilon'+\rho'$$

двух планет их взаимным притяжением, связаны соотношением

$$m\sqrt{a}\,\delta\rho=-m'\sqrt{a'}\,\delta\rho',$$

найденным Лапласом [1799].

Третий из указанных выше делителей, а именно $29n_0-72n'_0$, еще меньше. Но степень соответствующих ему возмущений не меньше, чем $|29-72|=43$, что делает их совершенно незаметными. Еще в большей мере это относится к дальнейшим делителям.

С другой стороны, если бы эксцентриситеты рассматриваемых планет и угол между плоскостями их орбит были бы велики, так что амплитуды соответствующих неравенств были бы заметными величинами, то эти неравенства можно было бы включить в вековые возмущения. Для этого нужно тригонометрические функции в выражениях (12.1) и (12.2) разложить по степеням $\varkappa t$.

В только что рассмотренном случае, когда $\varkappa=29n_0-72n'_0=$ $=1'',9823$, период равен 1800 годам. Поэтому для обычно встречающихся в астрономических исследованиях промежутков времени, не превышающих 200—300 лет, замена таких долгопериодических членов полиномами не вызывает неудобств.

Примечание. Легко убедиться, что при изучении движения двух планет под действием их взаимного притяжения приходится всегда иметь дело не больше чем с одним малым делителем.

В самом деле, малый делитель может быть только в том случае, когда одно из первых неполных частных цепной дроби

$$\frac{n_0}{n'_0}=\alpha+\cfrac{1}{\alpha_1+\cfrac{1}{\alpha_2+\dots}}$$

сравнительно велико. Если α_k есть это неполное частное, то малый делитель дается подходящей дробью

$$\frac{P_k}{Q_k}=\alpha+\cfrac{1}{\alpha_1+\ldots+\cfrac{1}{\alpha_{k-1}}}$$

и равен $Q_k n_0 - P_k n'_0$. Но благодаря большой величине α_k у следующей подходящей дроби, равной, как известно,

$$\frac{P_{k+1}}{Q_{k+1}}=\frac{\alpha_k P_k+P_{k-1}}{\alpha_k Q_k+Q_{k-1}},$$

числитель и знаменатель будут выражаться столь большими числами, что соответствующий делитель уже не придется принимать во внимание.

§ 13. Вековые возмущения

Вековые возмущения первого порядка, имеющие вид (11.4), получаются от тех членов пертурбационной функции, в которых аргумент тригонометрической функции не зависит от времени. Совокупность таких членов пертурбационной функции носит название ее *вековой части*.

Если средние движения n_0 и n'_0 рассматриваемых планет несоизмеримы, то равенство

$$jn_0+j'n'_0=0$$

возможно лишь, когда $j=j'=0$. В этом случае вековая часть пертурбационной функции состоит только из одного члена, причем этот член не зависит, как показывает выражение (11.4), от ε_0 и ε'_0. Поэтому, обозначив через $[R]$ и $[R']$ вековые части рассматриваемых пертурбационных функций, мы будем иметь

$$\frac{\partial [R]}{\partial \varepsilon_0}=0; \quad \frac{\partial [R']}{\partial \varepsilon'_0}=0. \tag{13.1}$$

Обозначим, далее, вековые возмущения первого порядка элементов a, e, ..., a', e', ... через $[a]$, $[e]$, ..., $[a']$, $[e']$, ...

Уравнения (10.1) показывают, что из (13.1) следует

$$\frac{d[a]}{dt}=0; \quad \frac{d[a']}{dt}=0.$$

Иначе говоря, большие полуоси планетных орбит не имеют вековых возмущений первого порядка. Равенство (8.8) позволяет утверждать то же самое и относительно средних движений планет.