сравнительно велико. Если α_k есть это неполное частное, то малый делитель дается подходящей дробью

$$\frac{P_k}{Q_k}=\alpha+\cfrac{1}{\alpha_1+\ldots+\cfrac{1}{\alpha_{k-1}}}$$

и равен $Q_k n_0 - P_k n'_0$. Но благодаря большой величине α_k у следующей подходящей дроби, равной, как известно,

$$\frac{P_{k+1}}{Q_{k+1}}=\frac{\alpha_k P_k+P_{k-1}}{\alpha_k Q_k+Q_{k-1}},$$

числитель и знаменатель будут выражаться столь большими числами, что соответствующий делитель уже не придется принимать во внимание.

§ 13. Вековые возмущения

Вековые возмущения первого порядка, имеющие вид (11.4), получаются от тех членов пертурбационной функции, в которых аргумент тригонометрической функции не зависит от времени. Совокупность таких членов пертурбационной функции носит название ее *вековой части*.

Если средние движения n_0 и n'_0 рассматриваемых планет несоизмеримы, то равенство

$$jn_0+j'n'_0=0$$

возможно лишь, когда $j=j'=0$. В этом случае вековая часть пертурбационной функции состоит только из одного члена, причем этот член не зависит, как показывает выражение (11.4), от ε_0 и ε'_0. Поэтому, обозначив через $[R]$ и $[R']$ вековые части рассматриваемых пертурбационных функций, мы будем иметь

$$\frac{\partial [R]}{\partial \varepsilon_0}=0; \quad \frac{\partial [R']}{\partial \varepsilon'_0}=0. \tag{13.1}$$

Обозначим, далее, вековые возмущения первого порядка элементов a, e, ..., a', e', ... через $[a]$, $[e]$, ..., $[a']$, $[e']$, ...

Уравнения (10.1) показывают, что из (13.1) следует

$$\frac{d[a]}{dt}=0; \quad \frac{d[a']}{dt}=0.$$

Иначе говоря, большие полуоси планетных орбит не имеют вековых возмущений первого порядка. Равенство (8.8) позволяет утверждать то же самое и относительно средних движений планет.

Полученный результат, очевидно, не зависит от числа взаимодействующих планет, что позволяет формулировать следующий весьма важный результат:

Теорема Лапласа — Лагранжа. Если средние движения планет несоизмеримы, то большие полуоси и средние движения не имеют вековых возмущений первого порядка.

Эта теорема была установлена в 1773 г. Лапласом с точностью до вторых степеней эксцентриситетов. Во всей общности ее доказал в 1776 г. Лагранж, нашедший уравнения (10.1) для больших полуосей.

Теорема Лапласа — Лагранжа вызвала большой интерес, так как ее связывали с вопросом об устойчивости солнечной системы. Поэтому было сделано много попыток распространить ее и на возмущения высших порядков. В 1809 г. Пуассону удалось показать, что возмущения второго порядка больших полуосей также не содержат вековых членов, хотя среди этих возмущений имеются смешанные члены вида $At\cos(\varkappa t+C)$. Доказательство теоремы Пуассона будет дано ниже (§ 14 гл. XX).

Дальнейший шаг был сделан румынским математиком Спиру Харету (Spiru C. Haretu), доказавшим в 1878 г. наличие в возмущениях больших полуосей вековых членов третьего порядка. Его работа, полностью опубликованная в 1885 г., вызвала интерес, но вследствие обширности и сложности выкладок была встречена с некоторым недоверием. Однако никто не решался заняться проверкой этих выкладок.

Попытка выяснить вопрос путем нахождения численного значения векового возмущения большой полуоси Сатурна, производимого действием Юпитера, была сделана в 1889 г. греческим астрономом Эгинитисом (D. Eginitis). Вычислив эти возмущения с точностью до третьих степеней масс, он нашел, что

$$a = a_0 - 0{,}000\,000\,000\,100\,196t + P, \tag{13.2}$$

где a_0 — значение большой полуоси в начальный момент времени, а через P обозначена совокупность периодических и смешанных членов.

Аналогичная попытка была сделана Гайо [1904], обнаружившим некоторые ошибки в выкладках Спиру Харету. Для нахождения возмущений первого, второго, третьего и частично четвертого порядка, испытываемых Сатурном со стороны Юпитера, Гайо применил интерполяционные методы. Это дало для большой полуоси Сатурна выражение вида

$$a = a_0 - 0{,}0099t + P,$$

совсем не похожее на (13.2). Таким образом, даже в этом случае, когда вследствие большой массы Юпитера и относительной близости планет возмущения особенно велики, не удалось поставить вне сомнения наличие вековых возмущений третьего порядка в большой полуоси.

В последние годы этот вопрос был всесторонне изучен в работах Меффруа, которому удалось не только установить реальное существование вековых возмущений третьего порядка у больших полуосей планетных орбит, но и дать аналитическое выражение этих возмущений [Меффруа, 1958].

Вековые возмущения больших полуосей, а также эксцентриситетов и наклонов планетных орбит сразу привлекли к себе большое внимание. В отсутствии вековых возмущений больших полуосей Лаплас видел гарантию неизменности солнечной системы. Эта точка зрения была воспринята и широко распространена популярными сочинениями. Между тем еще Лагранж указывал на то, что наличие вековых членов в рядах, представляющих решение дифференциальных уравнений, не обязательно влечет неустойчивость (точнее, неограниченность) этого решения. Так, если функция $\sin(mat)$, где m — малый параметр, a — произвольный числовой коэффициент, представляет решение дифференциального уравнения, то нахождение этого решения в виде ряда, расположенного по степеням m, даст

$$mat - \frac{1}{6} m^3a^3t^3 + \ldots$$

Мы получим, таким образом, вековые члены, хотя решение выражается периодической функцией времени.

Нужно также помнить, что законность решения, получаемого способом последовательных приближений, основанным на малости планетных масс, доказана лишь для ограниченного интервала времени (§ 1). Поэтому нельзя основывать на этом решении какие-либо заключения относительно движения для неограниченно большого интервала времени.

Теорема Лапласа — Лагранжа и теорема Пуассона не могут служить, таким образом, основой для каких-либо высказываний относительно отдаленного прошлого или отдаленного будущего солнечной системы. Но эти теоремы весьма важны в другом отношении: отсутствие сколько-нибудь заметных вековых возмущений у больших полуосей планетных орбит весьма существенно облегчает создание аналитических теорий их движения.

Что касается вековых возмущений прочих элементов, то тут приходится встречаться в основном с двумя проблемами.

Если движение планет изучается на протяжении небольших промежутков времени (не превосходящих, например, 10—20 столетий), то можно ограничиться, за весьма немногими исключениями, вычислением вековых возмущений первого порядка. Но эти возмущения нужно вычислить с гораздо большей точностью (учитывая более высокие степени эксцентриситетов и наклонов), нежели все остальные. Для этого употребляется метод Гаусса, который будет рассмотрен в следующем параграфе.

С другой стороны, если нас интересуют изменения конфигурации солнечной системы на протяжении многих тысячелетий, то главный интерес представляют возмущения нулевого ранга. Лагранж показал, что их можно вычислить отдельно, если ограничиться в разложении пертурбационной функции вторыми степенями эксцентриситетов и наклонов планетных орбит (гл. XX).

§ 14. Метод Гаусса для вычисления вековых возмущений

В 1814 г. Гаусс [1818] предложил особый метод для вычисления вековых возмущений первого порядка. Этот метод отличается от рассмотренных в предыдущих параграфах тем, что не требует разложения пертурбационной функции по степеням эксцентриситетов и наклонов орбит. Это делает его одинаково применимым при любых эксцентриситетах и наклонах. Им пользуются, например, для кометных орбит или орбит метеорных потоков. Но и в случае обычных планетных орбит нередко прибегают к этому методу, так как он дает вековые возмущения первого порядка совершенно точно, а это позволяет ограничиться в разложении пертурбационной функции только членами, необходимыми для нахождения периодических возмущений (которые вычисляются всегда с меньшим числом десятичных знаков, нежели вековые).

Метод Гаусса основан на использовании уравнений возмущенного движения, выведенных нами в §§ 6 и 7. Эти уравнения можно, учитывая (6.3) и замечая, что

$$k\sqrt{p} = na^2\sqrt{1-e^2}, \tag{14.1}$$

написать в следующей форме:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{da}{dt} &= \frac{2}{n\sqrt{1-e^2}}\left(e\sin vS + pr^{-1}T\right),\\
\frac{de}{dt} &= \frac{\sqrt{1-e^2}}{na}\left[\sin vS + (\cos v + \cos E)\,T\right],\\
\frac{di}{dt} &= \frac{1}{na^2\sqrt{1-e^2}}\, r\cos u W,\\
\frac{d\Omega}{dt} &= \frac{\operatorname{cosec} i}{na^2\sqrt{1-e^2}}\, r\sin u W,\\
e\frac{d\pi}{dt} &= 2e\sin^2\frac{i}{2}\,\frac{d\Omega}{dt} - \frac{\sqrt{1-e^2}}{na}\left[\cos vS - \left(1+\frac{r}{p}\right)\sin vT\right],\\
\frac{d\varepsilon}{dt} &= 2\sqrt{1-e^2}\sin^2\frac{i}{2}\,\frac{d\Omega}{dt} + \frac{e^2}{1+\sqrt{1-e^2}}\,\frac{d\pi}{dt} - \frac{2}{na^2}\, rS.
\end{aligned}\right\} \tag{14.2}$$