(учитывая более высокие степени эксцентриситетов и наклонов), нежели все остальные. Для этого употребляется метод Гаусса, который будет рассмотрен в следующем параграфе.

С другой стороны, если нас интересуют изменения конфигурации солнечной системы на протяжении многих тысячелетий, то главный интерес представляют возмущения нулевого ранга. Лагранж показал, что их можно вычислить отдельно, если ограничиться в разложении пертурбационной функции вторыми степенями эксцентриситетов и наклонов планетных орбит (гл. XX).

§ 14. Метод Гаусса для вычисления вековых возмущений

В 1814 г. Гаусс [1818] предложил особый метод для вычисления вековых возмущений первого порядка. Этот метод отличается от рассмотренных в предыдущих параграфах тем, что не требует разложения пертурбационной функции по степеням эксцентриситетов и наклонов орбит. Это делает его одинаково применимым при любых эксцентриситетах и наклонах. Им пользуются, например, для кометных орбит или орбит метеорных потоков. Но и в случае обычных планетных орбит нередко прибегают к этому методу, так как он дает вековые возмущения первого порядка совершенно точно, а это позволяет ограничиться в разложении пертурбационной функции только членами, необходимыми для нахождения периодических возмущений (которые вычисляются всегда с меньшим числом десятичных знаков, нежели вековые).

Метод Гаусса основан на использовании уравнений возмущенного движения, выведенных нами в §§ 6 и 7. Эти уравнения можно, учитывая (6.3) и замечая, что

$$k\sqrt{p} = na^2\sqrt{1-e^2}, \tag{14.1}$$

написать в следующей форме:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{da}{dt} &= \frac{2}{n\sqrt{1-e^2}}(e\sin vS + pr^{-1}T),\\
\frac{de}{dt} &= \frac{\sqrt{1-e^2}}{na}[\sin vS + (\cos v + \cos E)\,T],\\
\frac{di}{dt} &= \frac{1}{na^2\sqrt{1-e^2}}\,r\cos u W,\\
\frac{d\Omega}{dt} &= \frac{\operatorname{cosec} i}{na^2\sqrt{1-e^2}}\,r\sin u W,\\
e\frac{d\pi}{dt} &= 2e\sin^2\frac{i}{2}\,\frac{d\Omega}{dt} - \frac{\sqrt{1-e^2}}{na}\left[\cos vS - \left(1+\frac{r}{p}\right)\sin vT\right],\\
\frac{d\varepsilon}{dt} &= 2\sqrt{1-e^2}\sin^2\frac{i}{2}\,\frac{d\Omega}{dt} + \frac{e^2}{1+\sqrt{1-e^2}}\,\frac{d\pi}{dt} - \frac{2}{na^2}\,rS.
\end{aligned}\right\} \tag{14.2}$$

Полезно отметить, что в этих уравнениях не фигурирует явно масса m возмущаемого тела, тогда как в уравнениях (6.22), (7.3) и (7.6) эта масса фигурировала через посредство k, которое мы условились (§ 3) писать везде вместо $k\sqrt{1+m}$, где k — гауссова константа. Такое значение k имеет место и в равенстве (14.1), тогда как во всем дальнейшем под k будем разуметь гауссову константу.

В рассматриваемом нами случае возмущающее ускорение есть градиент пертурбационной функции R. Поэтому

$$S=\frac{\partial R}{\partial r}, \quad T=\frac{\partial R}{\partial r_p}, \quad W=\frac{\partial R}{\partial r_n}, \tag{14.3}$$

где производные берутся по радиусу-вектору r, по перпендикуляру к нему r_p (в сторону движения), и по нормали r_n к плоскости орбиты.

Поскольку речь идет о возмущениях первого порядка, мы можем вычислять их от каждой возмущающей планеты в отдельности, а затем сложить результаты. Таким образом, мы можем ограничиться случаем, когда

$$R=k^2m'\left(\frac{1}{\Delta}-\frac{xx'+yy'+zz'}{r'^3}\right),$$

где x', y', z' и m' — координаты и масса рассматриваемой возмущающей планеты, а через Δ обозначено расстояние между планетами.

Положим

$$R=R_0-R_1,$$

где

$$R_0=k^2m'\Delta^{-1}; \quad R_1=k^2m'(xx'+yy'+zz')r'^{-3}. \tag{14.4}$$

Функция R_0, соответствующая прямому действию возмущающей планеты на возмущаемую, называется *главной частью пертурбационной функции*. Функция R_1, происходящая от взаимодействия возмущающей планеты и Солнца, носит название *второй части пертурбационной функции*.

Предполагая, как всегда, несоизмеримость средних движений, покажем, что при вычислении вековых возмущений первого порядка пертурбационную функцию можно заменить ее главной частью.

Это утверждение является очевидным следствием такой теоремы:

разложение второй части пертурбационной функции по кратным средних аномалий не содержит членов, не зависящих от средней аномалии возмущающей планеты.

В самом деле, пусть

$$R_1 = \sum N \cos(jM + j'M' + B)$$

есть разложение второй части по кратным средних аномалий. Совокупность членов этого разложения, не зависящих от M', дается, учитывая (14.4), выражением

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} R_1\, dM' = \frac{k^2m'}{2\pi}\int_0^{2\pi} (xx' + yy' + zz')\, r'^{-3}\, dM'.$$

Но легко видеть, что каждый из трех стоящих в правой части интегралов равен нулю. Действительно, так как движение возмущающей планеты мы можем здесь считать эллиптическим, то

$$\int_0^{2\pi} x'r'^{-3}\, dM' = \frac{-1}{k^2(1+m)}\int_0^{2\pi} \frac{d^2x'}{dt^2}\, dM' = 0,$$

и аналогично для двух других интегралов. Теорема доказана.

Итак, выражение (14.3) мы можем заменить, если вычисляются только вековые возмущения, следующими:

$$S = k^2m'\,\frac{\partial\Delta^{-1}}{\partial r}; \quad T = k^2m'\,\frac{\partial\Delta^{-1}}{\partial r_p}; \quad W = k^2m'\,\frac{\partial\Delta^{-1}}{\partial r_n}. \tag{14.5}$$

Заметим теперь, что каждое из уравнений (14.2) мы можем написать в форме

$$\frac{de}{dt} = [e] + \sum A_{j,\,j'} \cos(jM + j'M' + Q_{j,\,j'}),$$

где через $[e]$ обозначен член, не зависящий от M и M', дающий после интегрирования вековое возмущение соответствующего элемента.

Очевидно,

$$[e] = \frac{1}{4\pi^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{de}{dt}\, dM\, dM'.$$

Подставив сюда выражения (14.2) и заметив, что коэффициенты при S, T, W в этих выражениях зависят только от M, получим

$$[e] = \frac{\sqrt{1-e^2}}{2\pi na}\int_0^{2\pi} [\sin v S_0 + (\cos v + \cos E)\, T_0]\, dM, \tag{14.6}$$

где

$$S_0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} S\,dM'; \quad T_0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} T\,dM'; \quad W_0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} W\,dM'.$$

При помощи равенств (14.5) эти выражения можно представить в следующем виде:

$$S_0 = \frac{\partial}{\partial r}V; \quad T_0 = \frac{\partial}{\partial r_p}V; \quad W_0 = \frac{\partial}{\partial r_n}V, \tag{14.7}$$

где

$$V = \frac{k^2 m'}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{dM'}{\Delta}. \tag{14.8}$$

Эти величины имеют, как показал Гаусс, весьма простую механическую интерпретацию. В самом деле, представим себе, что масса m' возмущающей планеты распределена вдоль ее орбиты таким образом, что на каждый линейный элемент приходится элемент массы dm', пропорциональный площади фокального сектора, опирающегося на этот линейный элемент. Обозначив через dt время, в течение которого планета проходит рассматриваемый элемент орбиты, а через P' период ее обращения, будем иметь, на основании второго закона Кеплера,

$$\frac{dm'}{m'} = \frac{dt}{P'} = \frac{n'\,dt}{n'P'} = \frac{dM'}{2\pi}.$$

Поэтому выражение (14.8) можно заменить таким:

$$V = k^2 \int \frac{dm'}{\Delta}, \tag{14.9}$$

где интегрирование производится вдоль всей орбиты.

Материальное эллиптическое кольцо с только что указанным распределением массы принято называть *гауссовым кольцом*. Выражение (14.9) есть, очевидно, потенциал гауссова кольца, а величины (14.7) представляют компоненты притяжения, производимого этим кольцом на материальную точку, масса которой равна единице.

Задача о вычислении притяжения гауссова кольца, получившая название *задачи Гаусса*, приводится к нахождению интегралов

$$F_x = \frac{\partial V}{\partial x} = k^2 \int \frac{x - x'}{\Delta^3}\,dm'; \ \ldots \tag{14.10}$$

Гаусс показал, что величины (14.10) можно выразить через эллиптические интегралы первого и второго рода, а это дает возможность находить их для любой точки пространства.

Переход от компонент притяжения (14.10) к нужным нам компонентам (14.7) производится по формулам (6.4).

Дав, таким образом, способ находить величины S_0, T_0, W_0 в любой точке пространства, можно перейти к вычислению вековых возмущений по формулам вида (14.6). Стоящие в этих формулах интегралы от функций вида

$$\Phi(M) = \frac{\sqrt{1-e^2}}{na}\left[\sin v S_0 + (\cos v + \cos E) T_0\right]$$

находятся численно.

Обозначим через $\Phi_0, \Phi_1, \ldots, \Phi_{k-1}$ значения такой функции, соответствующие значениям $M = 0, \frac{2\pi}{k}, \ldots, (k-1)\frac{2\pi}{k}$. Подстановка этих значений в разложение

$$\Phi(M) = a_0 + a_1 \cos M + a_2 \cos 2M + \ldots$$
$$\ldots + b_1 \sin M + b_2 \sin 2M + \ldots,$$

и почленное сложение полученных равенств дает

$$\frac{1}{k}\sum_{0}^{k-1} \Phi_i = a_0 + a_k + a_{2k} + a_{3k} + \ldots$$

Таким образом, искомая величина

$$[e] = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \Phi(M)\, dM$$

находится по формуле

$$[e] = \frac{1}{k}\sum_{0}^{k-1} \Phi_i \tag{14.11}$$

с ошибкой порядка a_k.

Можно показать, что a_k есть величина степени $k-1$ относительно e, e', ν. Поэтому формула (14.11) дает все вековые члены до $(k-1)$-й степени включительно.

Равенство $[a]=0$, вытекающее из теоремы Лапласа — Лагранжа, служит хорошим контролем.

Иногда предпочитают в интегралах (14.6) заменить переменную M эксцентрической аномалией, что делается при помощи соотношения

$$dM = (1 - e\cos E)\, dE = (r/a)\, dE.$$

Это несколько упрощает вычисления. Кроме того, при значительной величине эксцентриситета точки, соответствующие равноотстоящим значениям E, располагаются на орбите гораздо более равномерно, нежели точки, соответствующие равноотстоящим значениям M. Нужно, однако, заметить, что преимущество более равномерного распределения выбираемых на орбите точек не было доказано. При таком распределении части орбиты, проходимые быстро, получают такой же вес, как и проходимые медленно.

Излагая свой метод, Гаусс ограничился принципиальной стороной дела и не развил его достаточно подробно. Поэтому не удивительно, что этот метод в течение долгого времени почти не применялся. В 1882 г. Хилл впервые дал этот метод в детально разработанной и вполне приспособленной к вычислениям форме и этим ввел его в употребление. Новое решение основной задачи о вычислении притяжения, производимого гауссовым кольцом, было дано Альфаном (G. H. Halphen) в 1886 г. Это решение было затем усовершенствовано Хиллом и некоторыми другими авторами. Практическая сторона дела особенно подробно была рассмотрена Н. Н. Горячевым [1937]. Более подробные библиографические указания по истории вопроса, нежели даваемые Н. Н. Горячевым, можно найти в статье Цейпеля [1912].

Все указанные нами формы метода Гаусса одинаково применимы, какова бы ни была форма орбиты возмущающей планеты. Но особенно часто приходится иметь дело с тем случаем, когда эксцентриситет этой орбиты очень мал, а притяжение нужно вычислить в точках, близких к ее плоскости. Соответствующие формулы, основанные на разложении потенциала гауссова кольца в ряды специального вида, были даны М. Ф. Субботиным [1941].

§ 15. Возмущенное движение спутников

В этой главе мы рассмотрели применение метода вариации элементов к изучению возмущенного движения в том случае, когда за исходное приближение берется невозмущенное движение, даваемое задачей двух тел. Такой путь быстро приводит к цели для большинства планет солнечной системы благодаря тому, что возмущающее ускорение весьма не велико по сравнению с действием Солнца. Так, например, возмущающее действие всех планет на Землю никогда не превосходит 7×10^{-5} притяжения Солнца. Наиболее трудным случаем среди больших планет является изучение возмущений, испытываемых Сатурном со стороны Юпитера. Возмущающее действие достигает здесь 0,004 притяжения Солнца. Этот случай находится уже близко к границе возможности применения рассматриваемого метода.

Но при изучении движения спутников встречаются случаи, когда изложенный метод становится в своей первоначальной форме недостаточно эффективным. Такой случай имеет место для Луны, для которой возмущающее действие Солнца составляет около 0,01 притяжения Земли. Здесь задача построения аналитической теории движения была удовлетворительно решена лишь при помощи других принципиально отличных методов (§ 1 гл. II).