Излагая свой метод, Гаусс ограничился принципиальной стороной дела и не развил его достаточно подробно. Поэтому не удивительно, что этот метод в течение долгого времени почти не применялся. В 1882 г. Хилл впервые дал этот метод в детально разработанной и вполне приспособленной к вычислениям форме и этим ввел его в употребление. Новое решение основной задачи о вычислении притяжения, производимого гауссовым кольцом, было дано Альфаном (G. H. Halphen) в 1886 г. Это решение было затем усовершенствовано Хиллом и некоторыми другими авторами. Практическая сторона дела особенно подробно была рассмотрена Н. Н. Горячевым [1937]. Более подробные библиографические указания по истории вопроса, нежели даваемые Н. Н. Горячевым, можно найти в статье Цейпеля [1912].

Все указанные нами формы метода Гаусса одинаково применимы, какова бы ни была форма орбиты возмущающей планеты. Но особенно часто приходится иметь дело с тем случаем, когда эксцентриситет этой орбиты очень мал, а притяжение нужно вычислить в точках, близких к ее плоскости. Соответствующие формулы, основанные на разложении потенциала гауссова кольца в ряды специального вида, были даны М. Ф. Субботиным [1941].

§ 15. Возмущенное движение спутников

В этой главе мы рассмотрели применение метода вариации элементов к изучению возмущенного движения в том случае, когда за исходное приближение берется невозмущенное движение, даваемое задачей двух тел. Такой путь быстро приводит к цели для большинства планет солнечной системы благодаря тому, что возмущающее ускорение весьма не велико по сравнению с действием Солнца. Так, например, возмущающее действие всех планет на Землю никогда не превосходит 7×10^{-5} притяжения Солнца. Наиболее трудным случаем среди больших планет является изучение возмущений, испытываемых Сатурном со стороны Юпитера. Возмущающее действие достигает здесь 0,004 притяжения Солнца. Этот случай находится уже близко к границе возможности применения рассматриваемого метода.

Но при изучении движения спутников встречаются случаи, когда изложенный метод становится в своей первоначальной форме недостаточно эффективным. Такой случай имеет место для Луны, для которой возмущающее действие Солнца составляет около 0,01 притяжения Земли. Здесь задача построения аналитической теории движения была удовлетворительно решена лишь при помощи других принципиально отличных методов (§ 1 гл. II).

Для изучения движения искусственных спутников Земли изложенный метод будет, конечно, недостаточен, когда придется изучать движение спутников, расстояния которых от Земли сравнимы с расстоянием Луны. Что же касается близких спутников, то для них возмущающее действие Луны не превосходит 10^{-6} притяжения Земли, а возмущающее действие Солнца приблизительно вдвое меньше. Таким образом, для этих спутников возмущения со стороны небесных тел находятся весьма просто. Гораздо более значительные отклонения от эллиптического движения вызываются здесь несферичностью Земли. Но происходящая от этой несферичности возмущающая сила даже для самых близких спутников не превосходит 0,002 притяжения, производящего эллиптическое движение, и быстро убывает с расстоянием. Поэтому и эти возмущения могут быть найдены изложенным выше (§ 10) методом, служащим для вычисления малых возмущений эллиптического движения.

В тех случаях, когда возмущения настолько значительны, что этот метод становится мало эффективным, может оказаться полезным метод, предложенный Пуассоном [1835] для изучения движения Луны (§ 1 гл. II).

В методе Пуассона за исходное приближение принимается не эллиптическое движение, определяемое постоянными элементами, а более сложное движение, включающее вековые возмущения элементов Ω, π и ε. Делается это следующим образом.

Введем вместо Ω, π, ε новые неизвестные Ω_1, π_1, ε_1, определяемые равенствами

$$\Omega = \Omega_1 + m'\alpha t; \quad \pi = \pi_1 + m'\beta t; \quad \varepsilon = \varepsilon_1 + m'\gamma t, \tag{15.1}$$

где m' — масса рассматриваемого возмущающего тела, а α, β, γ — некоторые числовые коэффициенты.

Так как координаты небесных тел можно рассматривать как функции их средних долгот

$$\lambda = \varepsilon + \rho, \qquad \lambda' = \varepsilon' + \rho'$$

и оскулирующих элементов, то уравнения (10.1) можно написать так:

$$\frac{da}{dt} = m'A(\varepsilon + \rho, a, e, \ldots, \varepsilon' + \rho', a', e', \ldots),$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{d\Omega}{dt} = m'\Omega(\varepsilon + \rho, a, e, \ldots, \varepsilon' + \rho', a', e', \ldots),$$

$$\frac{d\pi}{dt} = m'\Pi(\varepsilon + \rho, a, e, \ldots, \varepsilon' + \rho', a', e', \ldots),$$

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = m'\mathrm{E}(\varepsilon + \rho, a, e, \ldots, \varepsilon' + \rho', a', e', \ldots).$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Подставив сюда величины (15.1), получим

$$\left.\begin{aligned} \frac{da}{dt} &= m'A(\varepsilon_1+\rho+\gamma m't,\ a,\ \ldots), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \frac{d\Omega_1}{dt} &= -m'\alpha+m'\Omega(\varepsilon_1+\rho+\gamma m't,\ a,\ \ldots), \\ \frac{d\pi_1}{dt} &= -m'\beta+m'\Pi(\varepsilon_1+\rho+\gamma m't,\ a,\ \ldots), \\ \frac{d\varepsilon_1}{dt} &= -m'\gamma+m'\mathrm{E}(\varepsilon_1+\rho+\gamma m't,\ a,\ \ldots), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}\right\} \tag{15.2}$$

Решение уравнения (15.2) будем опять искать в форме рядов

$$\begin{aligned} a &= a_0+\delta_1 a+\delta_2 a+\ \ldots, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \Omega_1 &= \Omega_0+\delta_1\Omega+\delta_2\Omega+\ \ldots, \\ \pi_1 &= \pi_0+\delta_1\pi+\delta_2\pi+\ \ldots, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{aligned}$$

расположенных по возрастающим степеням m'.

Отличие будет заключаться прежде всего в том, что при разложении правых частей уравнений (15.2) в ряды мы будем дополнительные члены $m'\alpha t$, $m'\beta t$, $m'\gamma t$ оставлять в аргументах тригонометрических функций. Пертурбационная функция является, очевидно, периодической функцией (с периодом 2π) не только от λ и λ', но и от Ω, Ω', π, π'. Вследствие этого, правые части уравнений (15.2) разлагаются в ряды вида

$$\sum N\cos D,$$

где

$$D = j\lambda+j'\lambda'+h\Omega+h'\Omega'+k\pi+k'\pi'.$$

При вычислении возмущений первого порядка мы будем иметь, следовательно, квадратуры вида

$$\int N\cos D\,dt = \frac{N}{\nu}\sin D_0,$$

где

$$\begin{aligned} D_0 &= j(n_0 t+\varepsilon_0+m'\alpha t)+\ \ldots\ +k'(\pi_0'+m\gamma' t), \\ \nu &= j(n_0+m'\alpha)+j(n_0'+m\alpha')+\ \ldots\ +k'm\gamma'. \end{aligned}$$

Таким образом, в члены первого порядка здесь включается часть величин второго порядка, чем без существенного усложнения вычислений можно достичь сокращения числа приближений.

Другое отличие заключается в том, что неопределенные пока коэффициенты α, β, γ можно выбрать так, что дополнительные члены в (15.1) будут представлять вековые возмущения первого порядка соответствующих элементов.

Изложенный способ весьма полезен не только при изучении движения спутников (у которых вековые возмущения часто весьма велики), но и при изучении движения планет. Учет вековых возмущений посредством соответствующего изменения аргументов периодических возмущений употребляется и здесь весьма часто.

§ 16. Исторические замечания

Идея рассматривать возмущенное движение Луны как эллиптическое с непрерывно изменяющимися элементами была широко использована еще Ньютоном. Именно этим путем им был получен ряд теорем, выражающих отдельные свойства движения. Как показал А. Н. Крылов [1915], третье примечание к теореме XVII первой книги Principia непосредственно приводит к простому выводу дифференциальных уравнений для оскулирующих элементов в той форме, которая была указана в § 6. Высказывалось даже мнение [Тиссеран, 1894], что уравнения, выведенные нами в § 6 и названные уравнениями Эйлера, были полностью известны Ньютону, но что он предпочел опубликовать лишь геометрические теоремы, выводимые как следствия этих уравнений в тех случаях, когда две из компонент S, T, W принимаются равными нулю.

Впервые систематическое применение метода вариации элементов для решения дифференциальных уравнений, определяющих движение Луны, было дано Эйлером [1753]. Использовав интегралы площадей, он получил уравнения, выражающие производные элементов i, Ω и p через компоненты S, T, W возмущающего ускорения. Формула, эквивалентная интегралу энергии, дала ему аналогичное выражение для производной большой полуоси, а следовательно (§ 6), и эксцентриситета. Наконец, уравнение орбиты позволило получить выражение (хотя и не вполне верное) для производной расстояния перигелия от узла. Все эти уравнения, в сущности, только обозначениями отличаются от уравнений (6.5)—(6.7), (6.10) и (6.12). Но ни в указанной работе, ни в позднейших статьях, где он пытался применить тот же метод к изучению движения планет, Эйлеру не удалось получить в правильном виде последнее уравнение, эквивалентное равенствам (6.14) и (6.16). Получившиеся вследствие этого, а также от ошибок в вычислениях, мало удовлетворительные результаты настолько огорчили Эйлера, что он перестал заниматься дальнейшим развитием метода вариации элементов и обратился к поискам других путей [Субботин, 1958].