члены в (15.1) будут представлять вековые возмущения первого порядка соответствующих элементов.

Изложенный способ весьма полезен не только при изучении движения спутников (у которых вековые возмущения часто весьма велики), но и при изучении движения планет. Учет вековых возмущений посредством соответствующего изменения аргументов периодических возмущений употребляется и здесь весьма часто.

§ 16. Исторические замечания

Идея рассматривать возмущенное движение Луны как эллиптическое с непрерывно изменяющимися элементами была широко использована еще Ньютоном. Именно этим путем им был получен ряд теорем, выражающих отдельные свойства движения. Как показал А. Н. Крылов [1915], третье примечание к теореме XVII первой книги Principia непосредственно приводит к простому выводу дифференциальных уравнений для оскулирующих элементов в той форме, которая была указана в § 6. Высказывалось даже мнение [Тиссеран, 1894], что уравнения, выведенные нами в § 6 и названные уравнениями Эйлера, были полностью известны Ньютону, но что он предпочел опубликовать лишь геометрические теоремы, выводимые как следствия этих уравнений в тех случаях, когда две из компонент S, T, W принимаются равными нулю.

Впервые систематическое применение метода вариации элементов для решения дифференциальных уравнений, определяющих движение Луны, было дано Эйлером [1753]. Использовав интегралы площадей, он получил уравнения, выражающие производные элементов i, Ω и p через компоненты S, T, W возмущающего ускорения. Формула, эквивалентная интегралу энергии, дала ему аналогичное выражение для производной большой полуоси, а следовательно (§ 6), и эксцентриситета. Наконец, уравнение орбиты позволило получить выражение (хотя и не вполне верное) для производной расстояния перигелия от узла. Все эти уравнения, в сущности, только обозначениями отличаются от уравнений (6.5)—(6.7), (6.10) и (6.12). Но ни в указанной работе, ни в позднейших статьях, где он пытался применить тот же метод к изучению движения планет, Эйлеру не удалось получить в правильном виде последнее уравнение, эквивалентное равенствам (6.14) и (6.16). Получившиеся вследствие этого, а также от ошибок в вычислениях, мало удовлетворительные результаты настолько огорчили Эйлера, что он перестал заниматься дальнейшим развитием метода вариации элементов и обратился к поискам других путей [Субботин, 1958].

Вывод уравнений, определяющих оскулирующие элементы, был доведен до конца Лагранжем. В своих первых работах, опубликованных в 1762—1765 гг., Лагранж делает функциями времени только четыре элемента, оставляя постоянными большую полуось и момент прохождения через перигелий. Так поступал и Эйлер в некоторых из своих работ. Но в мемуаре, премированном Парижской Академией наук в 1778 г., Лагранжу удалось дать всю систему дифференциальных уравнений, определяющих шесть оскулирующих элементов. Нужно, впрочем, отметить, что производные элементов он здесь выразил не через компоненты S, T, W, как это делал Эйлер, а через производные пертурбационной функции по координатам. Этим совершенно ненужным предположением о существовании пертурбационной функции суживалась бы область применения полученных уравнений, если бы не сделанное позднее самим Лагранжем замечание, что вместо $\partial R/\partial x$, $\partial R/\partial y$, $\partial R/\partial z$ в полученные им уравнения можно подставить компоненты F_x, F_y, F_z любого возмущающего ускорения.

Уравнения Лагранжа в только что указанном виде были использованы для вычисления возмущений, производимых планетами в движении комет. Но когда Лагранж, а затем и Лаплас начали их применять для изучения различных свойств движения планет, стала постепенно выясняться целесообразность замены производных пертурбационной функции по координатам ее производными по элементам. Так, например, замена первого из уравнений (6.22) первым из уравнений (8.6) позволила сразу доказать теорему Лапласа — Лагранжа о равенстве нулю вековых возмущений больших полуосей (§ 13).

Уравнения, выражающие производные оскулирующих элементов через частные производные пертурбационной функции по элементам, были полностью получены лишь в 1808 г., когда Лагранж и Лаплас одновременно нашли последнее из этих уравнений. В связи с этим, Лагранжем была создана общая форма метода вариации произвольных постоянных, воспроизведенная им впоследствии в его «Аналитической механике». Эту общую форму метода можно найти во многих руководствах [Тиссеран, 1889; Субботин, 1937; Брауэр и Клеменс, 1961]. Но так как ее астрономические приложения исчерпываются в настоящее время лишь выводом уравнений, уже полученных нами в § 6 другим путем, то мы не будем ее излагать. Что касается случая консервативных возмущающих сил, рассмотренного нами в § 8, то прямой вывод соответствующих уравнений проще всего дается теорией канонических уравнений (гл. XIX).

Такова в основных чертах история получения дифференциальных уравнений, служащих для нахождения оскулирующих элементов.

Уравнения в форме Эйлера (§ 6), с дополнениями и исправлениями, вытекавшими из работ Лагранжа, были сначала использованы для вычисления кометных возмущений. Сам Эйлер, считавший численное интегрирование дифференциальных уравнений наиболее удобным и наиболее мощным методом изучения возмущенного движения, рекомендовал вычислять возмущения в прямоугольных координатах, так как «если возмущения велики, то лучше всего придерживаться самых простых формул» [Субботин, 1958]. Но эта идея Эйлера слишком опережала технические возможности его времени и была полностью реализована лишь в XX в.

В 1810—1814 годах Гаусс использовал уравнения Эйлера для вычисления возмущенных элементов Паллады, но опубликовал только результаты своих вычислений. Метод получил широкое распространение после того, как Энке подробно изложил его в Приложениях к Берлинскому астрономическому ежегоднику на 1837 и 1838 гг. Здесь же Энке опубликовал, с разрешения Гаусса, данные этим последним новые формулы для численного интегрирования, гораздо более совершенные, нежели употреблявшиеся раньше.