ГЛАВА XVII

РАЗЛОЖЕНИЕ ПЕРТУРБАЦИОННОЙ ФУНКЦИИ В РЯД

§ 1. Введение

При изучении возмущенного движения пертурбационную функцию всегда приходится представлять в виде бесконечного ряда. В этой главе мы рассмотрим разложения, применяемые при изучении движения планет.

В предыдущей главе мы видели, что при изучении возмущений, производимых в движении двух планет их взаимным притяжением, приходится рассматривать пертурбационные функции (§ 10 гл. XVI):

$$R_{0,1} = k^2 m' R; \quad R_{1,0} = k^2 m R', \tag{1.1}$$

где

$$R = \frac{1}{\Delta} - \frac{r \cos H}{r'^2}; \quad R' = \frac{1}{\Delta} - \frac{r' \cos H}{r^2},$$

причем

$$\Delta^{-1} = \left(r^2 + r'^2 - 2rr' \cos H\right)^{-1/2}, \tag{1.2}$$

а через H обозначен угол между радиусами-векторами r и r'.

Чтобы можно было использовать уравнения Лагранжа (§ 8 гл. XVI) для нахождения оскулирующих элементов, нужно иметь выражение пертурбационной функции через элементы орбит рассматриваемых планет и время. Выражения r и r' через элементы орбит и время нам известны (гл. VI). Обратимся к нахождению в функции этих величин угла H.

Пусть (рис. 24) NP и $N'P'$ проекции на гелиоцентрическую небесную сферу орбит планет с массами m и m', причем в точках N и N' находятся восходящие узлы этих орбит по отношению к эклиптике $\gamma NN'$, принятой за основную координатную плоскость. Пусть, далее, в точки П и П′ проектируются перигелии, а в точки P и P' — положения планет в рассматриваемый момент. Через N_0 обозначим восходящий узел орбиты планеты m' относительно орбиты m, а через J — угол между плоскостями этих орбит.

Полагая

$$NN_0 = N; \quad N'N_0 = N',$$

и замечая, что

$$NN' = \Omega' - \Omega,$$

из треугольника $NN'N_0$, образованного тремя узлами, получим

$$\left.\begin{aligned} \sin J \sin N &= \sin i' \sin(\Omega' - \Omega), \\ \sin J \cos N &= -\cos i' \sin i + \sin i' \cos i \cos(\Omega' - \Omega), \\ \cos J &= \cos i' \cos i + \sin i' \sin i \cos(\Omega' - \Omega), \\ \sin J \sin N' &= \sin i \sin(\Omega' - \Omega), \\ \sin J \cos N' &= \cos i \sin i' - \sin i \cos i' \cos(\Omega' - \Omega). \end{aligned}\right\} \quad (1.3)$$

Эти уравнения позволяют найти угол J и вспомогательные величины N, N'.

Полагая

$$\tau = \Omega + N; \quad \tau' = \Omega' + N', \quad (1.4)$$

будем иметь

$$w = \tau + W; \quad w' = \tau' + W', \quad (1.5)$$

где через

$$w = \pi + v; \qquad w' = \pi' + v'$$

обозначены долготы рассматриваемых планет в их орбитах, а через W и W' обозначены

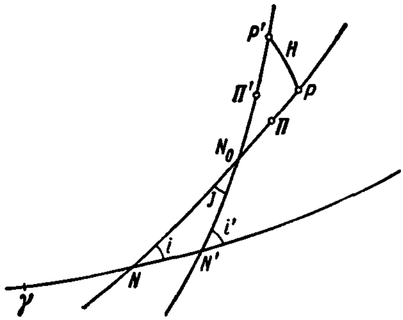

Рис. 24.

долготы планет, отсчитываемые от точки N_0. Таким образом,

$$W = \Pi + v; \quad W' = \Pi' + v', \quad (1.6)$$

где

$$\Pi = \pi - \tau; \qquad \Pi' = \pi' - \tau' \quad (1.7)$$

— долготы перигелиев, отсчитываемые от точки N_0.

Очевидно,

$$\cos H = \cos W \cos W' + \sin W \sin W' \cos J,$$

или

$$\cos H = \cos(W' - W) - 2\nu \sin W \sin W', \quad (1.8)$$

где

$$\nu = \sin^2(J/2).$$

Рассмотрим сначала главную часть каждой из пертурбационных функций, т. е. величину (1.2). После подстановки выражения (1.8) ее можно представить так:

$$\Delta^{-1} = \Delta_0^{-1}(1 + \beta)^{-1/2},$$

где

$$\Delta_0 = \left[r^2 + r'^2 - 2rr'\cos(W' - W)\right]^{1/2}, \tag{1.9}$$

$$\beta = \frac{4\nu rr' \sin W \sin W'}{r^2 + r'^2 - 2rr'\cos(W' - W)}. \tag{1.10}$$

В том случае, когда $|\beta| < 1$, формула бинома дает

$$\begin{aligned}\Delta^{-1} = \Delta_0^{-1} - rr'\Delta_0^{-3}\cdot 2\nu \sin W \sin W' +& \\ + r^2r'^2\Delta_0^{-5}\cdot 6\nu^2 \sin^2 W \sin^2 W' -& \\ - r^3r'^3\Delta_0^{-7}\cdot 20\nu^3 \sin^3 W \sin^3 W' +& \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots&\end{aligned} \tag{1.11}$$

Вторые части пертурбационных функций (1.1), иначе говоря, величины

$$R_1 = \frac{r\cos H}{r'^2}; \quad R_1' = \frac{r'\cos H}{r^2},$$

можно представить так:

$$\left.\begin{aligned} r'R_1 &= \frac{r}{r'}\left[(1-\nu)\cos(W' - W) + \nu\cos(W' + W)\right], \\ r'R_1' &= \left(\frac{r'}{r}\right)^2\left[(1-\nu)\cos(W' - W) + \nu\cos(W' + W)\right]. \end{aligned}\right\} \tag{1.12}$$

Равенства (1.11) и (1.12) дают выражение пертурбационной функции через r, v, r', v'. Остается заменить эти величины их выражениями через элементы и время, чтобы получить ту форму пертурбационной функции, которая обычно употребляется при изучении движения планет. Эта операция будет рассмотрена в следующих параграфах.

Примечание. Если исключить Плутона, то для каждой пары остальных больших планет будем иметь $|\beta| < 0{,}04$. В этом легко убедиться при помощи неравенства

$$|\beta| \leqslant \frac{4\nu rr'}{(r' - r)^2},$$

непосредственно вытекающего из (1.10).

Таким образом, во всех этих случаях ряд (1.11) сходится и притом настолько быстро, что можно удовольствоваться написанными нами членами.

Для Плутона и Нептуна условие $|\beta| < 1$ не соблюдается и ряд (1.11) расходится. Для Плутона и Урана он сходится, но очень медленно. Аналогичные случаи встречаются и при вычислении возмущений некоторых малых планет от Юпитера и Марса.

Во всех таких случаях приходится пользоваться другими методами разложения пертурбационной функции.

§ 2. Вычисление вспомогательных величин

Для вычисления величин J, N, N', характеризующих взаимное расположение орбит двух планет, вместо формул (1.3) можно пользоваться формулами Деламбра, выражающими три смежных элемента сферического треугольника через три других элемента. Эти формулы дают:

$$\left.\begin{aligned}
\sin\frac{J}{2}\sin\frac{N+N'}{2} &= \sin\frac{\Omega'-\Omega}{2}\sin\frac{i'+i}{2},\\
\sin\frac{J}{2}\cos\frac{N+N'}{2} &= \cos\frac{\Omega'-\Omega}{2}\sin\frac{i'-i}{2},\\
\cos\frac{J}{2}\sin\frac{N-N'}{2} &= \sin\frac{\Omega'-\Omega}{2}\cos\frac{i'+i}{2},\\
\cos\frac{J}{2}\cos\frac{N-N'}{2} &= \cos\frac{\Omega'-\Omega}{2}\cos\frac{i'-i}{2}.
\end{aligned}\right\} \tag{2.1}$$

Если первые два из этих равенств умножить соответственно на $\cos\frac{1}{2}(\Omega'+\Omega)$ и $\sin\frac{1}{2}(\Omega'+\Omega)$, а затем сложить, то получим первое из следующих соотношений:

$$\begin{aligned}
\sin\frac{J}{2}\sin\frac{\tau'+\tau}{2} = \sin\frac{\Omega'+\Omega}{2}\cos\frac{\Omega'-\Omega}{2}\sin\frac{i'-i}{2} &+\\
+\cos\frac{\Omega'+\Omega}{2}\sin\frac{\Omega'-\Omega}{2}\sin\frac{i'+i}{2}&,\\
\sin\frac{J}{2}\cos\frac{\tau'+\tau}{2} = \cos\frac{\Omega'+\Omega}{2}\cos\frac{\Omega'-\Omega}{2}\sin\frac{i'-i}{2} &-\\
-\sin\frac{\Omega'+\Omega}{2}\sin\frac{\Omega'-\Omega}{2}\sin\frac{i'+i}{2}&,
\end{aligned}$$

$$\cos\frac{J}{2}\sin\frac{\tau'-\tau}{2} = \frac{1}{2}\sin(\Omega'-\Omega)\left(\cos\frac{i'-i}{2}-\cos\frac{i'+i}{2}\right),$$

$$\cos\frac{J}{2}\cos\frac{\tau'-\tau}{2} = \sin^2\frac{\Omega'-\Omega}{2}\cos\frac{i'+i}{2}+\cos^2\frac{\Omega'-\Omega}{2}\cos\frac{i'-i}{2}.$$

Остальные соотношения получаются аналогично.

Положим для краткости

$$A=\sin\frac{J}{2}\sec\frac{i}{2}\sec\frac{i'}{2};\quad B=\cos\frac{J}{2}\sec\frac{i}{2}\sec\frac{i'}{2}. \tag{2.2}$$