Тогда, как легко видеть, предыдущие формулы можно заменить такими:

$$\left.\begin{aligned}
A\sin\frac{\tau'+\tau}{2} &= \operatorname{tg}\frac{i'}{2}\sin\Omega' - \operatorname{tg}\frac{i}{2}\sin\Omega,\\
A\cos\frac{\tau'+\tau}{2} &= \operatorname{tg}\frac{i'}{2}\cos\Omega' - \operatorname{tg}\frac{i}{2}\cos\Omega,\\
B\sin\frac{\tau'-\tau}{2} &= \operatorname{tg}\frac{i'}{2}\operatorname{tg}\frac{i}{2}\sin(\Omega'-\Omega),\\
B\cos\frac{\tau'-\tau}{2} &= 1+\operatorname{tg}\frac{i'}{2}\operatorname{tg}\frac{i}{2}\cos(\Omega'-\Omega).
\end{aligned}\right\} \tag{2.3}$$

Соотношения (2.3) и (2.2) часто более удобны для нахождения J, τ, τ', нежели формулы (1.3) или (2.1), дополненные равенствами (1.4).

Последние два из соотношений (2.3) дают

$$\operatorname{tg}\frac{\tau'-\tau}{2} = \frac{\varkappa\sin(\Omega'-\Omega)}{1+\varkappa\cos(\Omega'-\Omega)},$$

где

$$\varkappa = \operatorname{tg}\frac{i}{2}\operatorname{tg}\frac{i'}{2}.$$

Отсюда, пользуясь известным разложением, находим следующую полезную формулу:

$$\frac{1}{2}(\tau'-\tau) = \sum_{1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}\varkappa^n\sin n(\Omega'-\Omega).$$

Таким образом, если i и i' можно рассматривать как малые величины первого порядка, то разность $\tau'-\tau$ является малой величиной второго порядка.

§ 3. Случай круговых орбит

Рассмотрим сначала ту часть разложения пертурбационной функции, которая не зависит от эксцентриситетов планетных орбит.

Если $e=e'=0$, то

$$r=a;\quad w=\lambda;\quad r'=a';\quad w'=\lambda',$$

где, как и раньше, через λ и λ' обозначены средние долготы в орбите. Соответствующие значения W и W' обозначим через

$$L=\lambda-\tau;\quad L'=\lambda'-\tau'. \tag{3.1}$$

Разложение (1.11) главной части пертурбационной функции принимает здесь вид

$$\Delta^{-1} = \mathrm{I}-\mathrm{II}+\mathrm{III}-\mathrm{IV}+\ldots, \tag{3.2}$$

где

$$\left.\begin{aligned} \mathrm{I} &= \Delta_0^{-1} = \left[a^2 + a'^2 - 2aa' \cos(L' - L)\right]^{-\frac{1}{2}}, \\ \mathrm{II} &= aa'\Delta_0^{-3} \cdot 2\nu \sin L \sin L', \\ \mathrm{III} &= (aa')^2 \Delta_0^{-5} \cdot 6\nu^2 \sin^2 L \sin^2 L', \\ \mathrm{IV} &= (aa')^3 \Delta_0^{-7} \cdot 20\nu^3 \sin^3 L \sin^3 L', \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{aligned}\right\} \tag{3.3}$$

Введем в рассмотрение отношение больших полуосей орбит

$$\alpha = a/a',$$

причем условимся выбирать всегда обозначения так, чтобы было $a < a'$ и, следовательно, $\alpha < 1$.

Начнем с разложения в тригонометрические ряды величин

$$(aa')^{\frac{n-1}{2}} \Delta_0^{-n} = a'^{-1} \alpha^{\frac{n-1}{2}} (1 - 2\alpha \cos S + \alpha^2)^{-\frac{n}{2}},$$

где

$$n = 1,\ 3,\ 5,\ 7,\ \ldots \quad \text{и} \quad S = L' - L.$$

Так как при $0 < \alpha < 1$ эти величины удовлетворяют условиям Дирихле, то мы можем положить

$$(1 - 2\alpha \cos S + \alpha^2)^{-\frac{n}{2}} = \frac{1}{2} \sum_{-\infty}^{+\infty} b_n^{(i)} \cos iS, \tag{3.4}$$

где $b_n^{(-i)} = b_n^{(i)}$.

Коэффициенты $b_n^{(i)}$ мы будем называть, следуя установившемуся обычаю, коэффициентами Лапласа.

Полагая, далее,

$$c_n^{(i)} = \alpha^{\frac{n-1}{2}} b_n^{(i)} \tag{3.5}$$

и условившись не обозначать пределы суммирования, когда оно производится от $-\infty$ до $+\infty$, будем иметь

$$(aa')^{\frac{n-1}{2}} \Delta_0^{-n} = (a')^{-1} \cdot \frac{1}{2} \sum c_n^{(i)} \cos i(L' - L). \tag{3.6}$$

При подстановке рядов (3.6) в выражение (3.2) нам придется каждый из этих рядов умножать на одно из выражений

$$2 \sin L \sin L' = \cos(L' - L) - \cos(L' + L),$$

$$8 \sin^2 L \sin^2 L' = 2 - 2\cos 2L - 2\cos 2L' + \\ + \cos(2L' + 2L) + \cos(2L' - 2L),$$

$$32 \sin^3 L \sin^3 L' = 9 \cos (L' - L) - 9 \cos (L' + L) + \\ + 3 \cos (3L + L') - 3 \cos (3L - L') + \\ + 3 \cos (3L' + L) - 3 \cos (3L' - L) + \\ + \cos (3L' - 3L) - 3 \cos (3L' + 3L),$$

. . . .

Таким образом, нам придется находить произведения вида

$$\cos \beta \sum c_n^{(i)} \cos i (L' - L) = \frac{1}{2} \sum c_n^{(i)} \cos [i (L' - L) + \beta] + \\ + \frac{1}{2} \sum c_n^{(i)} \cos [i (L' - L) - \beta].$$

Стоящие здесь справа суммы равны, так как они переходят одна в другую при замене i через $-i$. Поэтому

$$\cos \beta \sum c_n^{(i)} \cos i (L' - L) = \sum c_n^{(i)} \cos [i (L' - L) + \beta].$$

Пользуясь этой формулой, получим

$$a' \text{II} = \frac{1}{2} \nu \sum c_3^{(i)} \cos (i + 1)(L' - L) - \\ - \frac{1}{2} \nu \sum c_3^{(i)} \cos [(i + 1) L' - (i - 1) L],$$

или, заменяя в первой сумме $(i + 1)$ через i,

$$a' \text{II} = \\ = \frac{1}{2} \nu \sum c_3^{(i-1)} \cos i (L' - L) - \frac{1}{2} \nu \sum c_3^{(i)} \cos [(i + 1) L' - (i - 1) L].$$

Вычислив таким же способом следующие величиины (3.3), подставив полученные выражения в равенство (3.2) и сделав приведение подобных членов, окончательно будем иметь

$$a' \Delta^{-1} = \frac{1}{2} \sum a' A_i \cos (iL' - iL) + \\ + \nu \sum a' B_i \cos [(i + 1) L' - (i - 1) L] + \\ + \nu^2 \sum a' C \cos [(i + 2) L' - (i - 2) L] + \\ + \nu^3 \sum a' D_i \cos [(i + 3) L' - (i - 3) L] + \\ + \nu^4 \sum a' E_i \cos [(i + 4) L' - (i - 4) L] + \\ \cdots \qquad (3.7)$$

Коэффициенты стоящих здесь рядов даются формулами:

$$a'A_i = c_1^{(i)} - \nu c_3^{(i-1)} + \frac{3}{4}\nu^2\left(c_5^{(i-2)} + 2c_5^{(i)}\right) - $$
$$- \frac{5}{8}\nu^3\left(c_7^{(i-3)} + 9c_7^{(i-1)}\right) + \frac{35}{64}\nu^4\left(c_9^{(i-4)} + 16c_9^{(i-2)} + 18c_9^{(i)}\right) - \ldots,$$

$$a'B_i = \frac{1}{2}c_3^{(i)} - \frac{3}{4}\nu\left(c_5^{(i-1)} + c_5^{(i+1)}\right) + \frac{15}{16}\nu^2\left(c_7^{(i-2)} + 3c_7^{(i)} + c_7^{(i+2)}\right) -$$
$$- \frac{35}{32}\nu^3\left(c_9^{(i-3)} + 6c_9^{(i-1)} + 6c_9^{(i+1)} + c_9^{(i+3)}\right) + \ldots,$$

$$a'C_i = \frac{3}{8}c_5^{(i)} - \frac{15}{16}\nu\left(c_7^{(i-1)} + c_7^{(i+1)}\right) +$$
$$+ \frac{35}{64}\nu^2\left(3c_9^{(i-2)} + 8c_9^{(i)} + 3c_9^{(i+2)}\right) - \ldots,$$

$$a'D_i = \frac{5}{16}c_7^{(i)} - \frac{35}{32}\nu\left(c_9^{(i-1)} + c_9^{(i+1)}\right) + \ldots,$$

$$a'E_i = \frac{35}{128}c_9^{(i)} - \ldots$$

Имея разложение (3.7) главной части каждой из пертурбационных функций (1.1), легко получить разложения полных выражений этих функций. В самом деле, для вторых частей пертурбационных функций выражения (1.12) в рассматриваемом случае дают

$$\left.\begin{aligned} a'R_1 &= \alpha(1-\nu)\cos(L'-L) + \alpha\nu\cos(L'+L), \\ a'R_1' &= \alpha^{-2}(1-\nu)\cos(L'-L) + \alpha^{-2}\nu\cos(L'+L). \end{aligned}\right\} \qquad (3.8)$$

Сопоставление этих выражений с разложением (3.7) показывает, что для получения разложения $a'R$ достаточно в равенстве (3.7) заменить

$$\left.\begin{array}{lcl} a'A_1 & \text{через} & a'A_1 - \alpha(1-\nu), \\ a'A_{-1} & » & a'A_{-1} - \alpha(1-\nu), \\ a'B_0 & » & a'B_0 - \alpha, \end{array}\right\} \qquad (3.9)$$

а чтобы получить $a'R'$, нужно в равенстве (3.7) заменить

$$\left.\begin{array}{lcl} a'A_1 & \text{через} & a'A_1 - \alpha^{-2}(1-\nu), \\ a'A_{-1} & » & a'A_{-1} - \alpha^{-2}(1-\nu), \\ a'B_0 & » & a'B_0 - \alpha^{-2}. \end{array}\right\} \qquad (3.10)$$

Таким образом, для случая двух круговых орбит, плоскости которых образуют не слишком большой угол, задача разложения пертурбацнонных функций полностью решена. Для фактического получения соответствующих рядов нужно только уметь вычислять величины (3.5), или, что то же самое, коэффициенты Лапласа для данного значения $\alpha = a/a'$. Этот вопрос будет рассмотрен в §§ 7 и 8.

§ 4. Разложение пертурбационной функции по степеням эксцентриситетов

Формулы (1.11) и (1.12) показывают, что пертурбационную функцию R можно рассматривать как функцию четырех величин

$$r, \ r', \quad W = \Pi + v, \quad W' = \Pi' + v',$$

но по соображениям, которые будут сейчас ясны, нам удобнее представить эту функцию в таком виде:

$$R = F(\ln r, \ \ln r', \ W, \ W').$$

Положим

$$\ln r = \ln a + \rho, \quad \ln r' = \ln a' + \rho', \quad W = L + f, \quad W' = L' + f',$$

где через

$$f = v - M, \quad f' = v' - M'$$

обозначены уравнения центра для рассматриваемых планет.

Формулы (5.7) и (6.5) гл. VI позволяют легко получить следующие разложения по степеням эксцентриситета:

$$\left.\begin{aligned} \rho = -e\cos M + e^2\left(\frac{1}{4} - \frac{3}{4}\cos 2M\right) + \\ + e^3\left(\frac{3}{8}\cos M - \frac{17}{24}\cos 3M\right) + \ldots, \\ f = e\cdot 2\sin M + e^2\cdot\frac{5}{4}\sin 2M + \\ + e^3\left(-\frac{1}{4}\sin M + \frac{13}{12}\sin 3M\right) + \ldots, \end{aligned}\right\} \tag{4.1}$$

и аналогичные выражения для ρ' и f'.

Стоящая перед нами задача заключается в разложении функции

$$R = F(\ln a + \rho, \ \ln a' + \rho', \ L + f, \ L' + f') \tag{4.2}$$

по степеням e и e', причем значение этой функции при $e = e' = 0$, т. е.

$$F(\ln a, \ \ln a', \ L, \ L') \tag{4.3}$$

дается разложением, найденным в предыдущем параграфе.

Начнем с разложения функции (4.2) по степеням ρ, ρ', f, f'. Для этого воспользуемся формулой Тэйлора:

$$\varphi(u + \Delta u, \ v + \Delta v, \ \ldots) = \exp\left(\Delta u\frac{\partial}{\partial u} + \Delta v\frac{\partial}{\partial v} + \ldots\right)\varphi(u, \ v, \ \ldots)\cdot$$