фактического получения соответствующих рядов нужно только уметь вычислять величины (3.5), или, что то же самое, коэффициенты Лапласа для данного значения $\alpha = a/a'$. Этот вопрос будет рассмотрен в §§ 7 и 8.

§ 4. Разложение пертурбационной функции по степеням эксцентриситетов

Формулы (1.11) и (1.12) показывают, что пертурбационную функцию R можно рассматривать как функцию четырех величин

$$r, \ r', \quad W = \Pi + v, \quad W' = \Pi' + v',$$

но по соображениям, которые будут сейчас ясны, нам удобнее представить эту функцию в таком виде:

$$R = F(\ln r, \ \ln r', \ W, \ W').$$

Положим

$$\ln r = \ln a + \rho, \quad \ln r' = \ln a' + \rho', \quad W = L + f, \quad W' = L' + f',$$

где через

$$f = v - M, \quad f' = v' - M'$$

обозначены уравнения центра для рассматриваемых планет.

Формулы (5.7) и (6.5) гл. VI позволяют легко получить следующие разложения по степеням эксцентриситета:

$$\left.\begin{aligned} \rho = -e\cos M + e^2\left(\frac{1}{4} - \frac{3}{4}\cos 2M\right) &+ \\ + e^3\left(\frac{3}{8}\cos M - \frac{17}{24}\cos 3M\right) &+ \ldots, \\ f = e \cdot 2\sin M + e^2 \cdot \frac{5}{4}\sin 2M &+ \\ + e^3\left(-\frac{1}{4}\sin M + \frac{13}{12}\sin 3M\right) &+ \ldots, \end{aligned}\right\} \tag{4.1}$$

и аналогичные выражения для ρ' и f'.

Стоящая перед нами задача заключается в разложении функции

$$R = F(\ln a + \rho, \ \ln a' + \rho', \ L + f, \ L' + f') \tag{4.2}$$

по степеням e и e', причем значение этой функции при $e = e' = 0$, т. е.

$$F(\ln a, \ \ln a', \ L, \ L') \tag{4.3}$$

дается разложением, найденным в предыдущем параграфе.

Начнем с разложения функции (4.2) по степеням ρ, ρ', f, f'. Для этого воспользуемся формулой Тэйлора:

$$\varphi(u + \Delta u, \ v + \Delta v, \ \ldots) = \exp\left(\Delta u \frac{\partial}{\partial u} + \Delta v \frac{\partial}{\partial v} + \ldots\right)\varphi(u, \ v, \ \ldots)\cdot$$

Введя для сокращения письма символы

$$D=\frac{\partial}{\partial(\ln a)};\quad D'=\frac{\partial}{\partial(\ln a')},$$
$$D_1=\frac{\partial}{\partial L};\qquad D_1'=\frac{\partial}{\partial L'},$$

получим

$$R=\exp\left(\rho D+\rho' D'+fD_1+f'D_1'\right)F(\ln a,\ \ln a',\ L,\ L').$$

Так как $\exp(\rho D+\rho' D'+fD_1+f'D_1')$ есть произведение двух множителей

$$\exp(\rho D+fD_1)\quad \text{и}\quad \exp(\rho' D'+f'D_1'),\tag{4.4}$$

то рассмотрим символическое умножение функции (4.3) на каждый из этих множителей в отдельности.

Положив

$$\lambda=\exp(\sqrt{-1}\,L);\quad \lambda'=\exp(\sqrt{-1}\,L'),$$

мы можем функции (4.3), представляемой выражениями (3.7) и (3.8), придать форму

$$\sum H(s,\ s')\lambda^s\lambda'^{s'},$$

где через $H(s,\ s')$ обозначен ряд, расположенный по целым положительным степеням ν. Суммирование по индексам s и s' производится от $-\infty$ до $+\infty$, причем сумма $s+s'$ в каждом члене есть четное не отрицательное число.

Общий член этого ряда

$$R^0=H(s,\ s')\lambda^s\lambda'^{s'}\tag{4.5}$$

умножим на первый из символических множителей (4.4). Так как

$$D_1=\frac{\partial}{\partial L}=\sqrt{-1}\,\lambda\frac{\partial}{\partial\lambda},$$

то

$$D_1R^0=\sqrt{-1}\,sR^0,$$

а потому

$$\exp(\rho D+fD_1)R^0=\exp(\rho D+sf\sqrt{-1})R^0.\tag{4.6}$$

Равенства (4.1) показывают, что

$$\exp(\rho D+sf\sqrt{-1})=k_0+k_1e+k_2e^2+\ldots,\tag{4.7}$$

где k_0, k_1, ... функции D, s и M.

Если положить

$$\mu=\exp(\sqrt{-1}\,M),$$

то равенства (4.1) можно представить так:

$$\rho = -\frac{1}{2}e(\mu+\mu^{-1}) + \frac{1}{4}e^2\left(1-\frac{3}{2}\mu^2-\frac{3}{2}\mu^{-2}\right)+\ldots,$$

$$f\sqrt{-1} = e(\mu-\mu^{-1}) + \frac{5}{8}e^2(\mu^2-\mu^{-2})+\ldots$$

Подставив эти выражения в равенство (4.7), получим

$$\left.\begin{aligned} k_0 &= 1,\\ k_1 &= \Pi_1^1\mu + \Pi_{-1}^1\mu^{-1},\\ k_2 &= \Pi_2^2\mu^2 + \Pi_0^2 + \Pi_{-2}^2\mu^{-2},\\ &\cdots\cdots\cdots\cdots,\\ k_n &= \Pi_n^n\mu^n + \Pi_{n-2}^n\mu^{n-2} + \ldots + \Pi_{-n}^n\mu^{-n}. \end{aligned}\right\} \qquad (4.8)$$

Легко видеть, что $\Pi_r^n = \Pi_r^n(D, s)$, где $n=0, 1, 2, \ldots, n-|r| = 0, 2, 4, \ldots$, есть полином степени n относительно D и s. Эти полиномы мы будем называть *операторами Ньюкома.*

Таким образом, после умножения выражения (4.5) на (4.7) мы получим ряд, в котором член, содержащий e^n, будет иметь такой вид:

$$R_n^0 = e^n\sum_r P_r^n(s, s')\lambda^s\lambda'^{s'}\mu^r, \qquad (4.9)$$

где $r=n,\ n-2,\ n-4, \ldots, -n$, причем для краткости положено

$$P_r^n = \Pi_r^n H(s, s').$$

Умножим теперь выражение (4.9) на второй из символических множителей (4.4). Это даст ряд, расположенный по степеням e', в котором член с $(e')^{n'}$ будет

$$R_{n,n'}^0 = e^n(e')^{n'}\sum_r\sum_{r'} P_{r,r'}^{n,n'}(s, s')\lambda^s(\lambda')^{s'}\mu^r(\mu')^{r'},$$

где $r'=n',\ n'-2, \ldots, -n'$. Здесь положено

$$P_{r,r'}^{n,n'}(s, s') = \Pi_r^n\Pi_{r'}^{n'}H(s, s'). \qquad (4.10)$$

Таким образом, разложение пертурбационной функции получается окончательно в следующем виде:

$$R = \sum e^n(e')^{n'}P_{r,r'}^{n,n'}(s, s')\cos(sL+s'L'+rM+r'M'), \qquad (4.11)$$

где n и n' меняются от 0 до $+\infty$, тогда как s, s', r, r' принимают целые значения от $-\infty$ до $+\infty$, причем в каждом из членов разложения величины $s+s'$, $n-|r|$, $n'-|r'|$ равны четным не отрицательным числам.

Выражение (4.10) можно представить в другой форме. Так как функция (4.3), даваемая разложениями (3.7) и (3.8), есть однородная функция a и a', порядок которой равен -1, то теорема Эйлера позволяет написать

$$a\frac{\partial F}{\partial a}+a'\frac{\partial F}{\partial a'}=-F$$

или

$$DF+D'F=-F.$$

Поэтому для рассматриваемых нами случаев имеет место символическое равенство

$$D+D'=-1.$$

Сообразно с этим можно положить

$$\Pi_{r'}^{n'}(D',\ S')=\Pi_{r'}^{n'}(-D-1,\ s')=\Pi_{0,\,r'}^{0,\,n'}(D,\ s')$$

и написать равенство (4.10) в следующем виде:

$$P_{r,\,r'}^{n,\,n'}(s,\ s')=\Pi_{r,\,r'}^{n,\,n'}(D,\ s,\ s')\,H(s,\ s'), \tag{4.12}$$

где

$$\Pi_{r,\,r'}^{n,\,n'}(D,\ s,\ s')=\Pi_{r}^{n}(D,\ s)\,\Pi_{0,\,r'}^{0,\,n'}(D,\ s'). \tag{4.13}$$

Это соотношение показывает, что сложные операторы, входящие в окончательную формулу (4.12), получаются путем перемножения простых операторов.

Операторы (4.13), в которых $s+s'=2k$, называются операторами k-го класса. Эти операторы применяются к k-й строке формулы (3.7), в которую внесены изменения (3.9) и (3.10).

Когда все нужные операторы найдены, окончательное разложение пертурбационной функции легко получается по формулам (4.11) и (4.12). Для небольших значений индексов n, r, n', r' вычисление операторов не представляет затруднений, но оно очень быстро усложняется при возрастании индексов. В этом случае как для нахождения операторов, так и для контроля используются многочисленные рекуррентные соотношения между операторами с различными индексами.

Наиболее полную таблицу готовых операторов, имеющих форму полиномов от D с численными коэффициентами, дает Ш. Г. Шараф [1955]. Здесь же, а также в статье Цейпеля [1912], можно найти подробные сведения о других работах, посвященных теории и применению операторов Ньюкома.