§ 5. Выражение пертурбационной функции через средние аномалии

Результаты двух предыдущих параграфов показывают, что пертурбационные функции, определяемые равенствами (1.1), могут быть разложены в ряды вида

$$R_{0,1}=\sum Ke^{h}(e')^{h'}\nu^{f}\cos(sL+s'L'+rM+r'M'). \qquad (5.1)$$

Здесь h, h', f принимают значения 0, 1, 2, ..., тогда как s, s', r, r' равны 0, ± 1, ± 2, ..., причем сумма $s+s'$ есть четное число; наконец, разности $h-|r|$, $h'-|r'|$, $2f-|s+s'|$ могут принимать лишь значения 0, 2, 4, ...

Через K обозначены произведения k^2m' на функции больших полуосей a и a', зависящие от целых чисел h, h', f, s, s', r, r'.

Так как

$$L=\Pi+M;\quad L'=\Pi'+M', \qquad (5.2)$$

то ряд (5.1) можно представить так:

$$R_{0,1}=\sum Ke^{h}(e')^{h'}\nu^{f}\cos(jM+j'M'+s\Pi+s'\Pi'), \qquad (5.3)$$

где $j=s+r$, $j'=s'+r'$.

Весьма важное свойство членов этого разложения выражается следующей теоремой, на которую мы уже ссылались (§ 12 гл. XVI):

степень $h+h'+2f$ какого-либо члена разложения (5.3) либо равна $|j+j'|$, либо превосходит эту величину на четное число.

Чтобы убедиться в этом, условимся обозначать через (2) любое из чисел 0, 2, 4, ...

Тогда, как мы уже видели,

$$h=|r|+(2);\quad h'=|r'|+(2);\quad 2f=|s+s'|+(2),$$

и потому

$$h+h'+2f=|r|+|r'|+|s+s'|+(2).$$

С другой стороны, легко проверить, что каковы бы ни были целые числа a, b, c, всегда имеет место равенство

$$|a|+|b|+|c|=|a+b+c|+(2).$$

Следовательно,

$$h+h'+2f=|s+r+s'+r'|+(2),$$

что и доказывает теорему.

Разложение пертурбационной функции в форме (5.3) используется при нахождении планетных возмущений в координатах. Для нахождения планетных возмущений в элементах, Леверрье придал этому разложению другую форму. Вместо долгот L и L', считаемых от точки пересечения орбит, он ввел долготы в орбитах (удерживаем его обозначения):

$$l = nt + \varepsilon = L + \tau; \quad l' = n't + \varepsilon' = L' + \tau',$$

и положил

$$\lambda = l + \tau' - \tau, \tag{5.4}$$

что дает

$$L = \lambda - \tau'; \quad L' = l' - \tau'. \tag{5.5}$$

С другой стороны, замечая, что

$$\pi = \tau + \Pi; \quad \pi' = \tau' + \Pi',$$

и положив

$$\omega = \pi + \tau' - \tau = \Pi + \tau', \tag{5.6}$$

будем иметь

$$\Pi = \omega - \tau'; \quad \Pi' = \pi' - \tau'. \tag{5.7}$$

Из разложения (5.1) исключим M и M' при помощи равенств (5.2) и в полученный ряд подставим выражения (5.5) и (5.7). Это даст

$$R_{0,1} = \sum K e^h e'^{h'} \nu^f \cos(j\lambda + j'l' + k\omega + k'\pi' - 2g\tau'). \tag{5.8}$$

Легко видеть, что числа j, j', k, k', $2g$ связаны соотношением

$$j + j' + k + k' - 2g = 0,$$

которое является следствием независимости функции (5.8) от начала счета долгот.

Форма (5.8) разложения пертурбационной функции была использована Леверрье для построения теорий движения больших планет. Он дал разложение (5.8) в развернутом виде до членов седьмой степени относительно e, e' и J включительно [Леверрье, 1855]. Это разложение содержит 469 членов. Боке [1885] продолжил его до членов восьмой степени включительно.

Метод, использованный в этих работах для разложения по степеням эксцентриситетов, подробно изложен Тиссераном [1889].

§ 6. Начальные члены разложения пертурбационной функции

Во многих случаях бывает полезно иметь первые члены разложения пертурбационной функции. Выполним поэтому операции, указанные в предыдущих параграфах, ограничиваясь членами второй степени. С такою точностью разложение было получено впервые Лагранжем и Лапласом. Это позволило им либо объяснить, либо открыть некоторые весьма существенные особенности