Леверрье придал этому разложению другую форму. Вместо долгот L и L', считаемых от точки пересечения орбит, он ввел долготы в орбитах (удерживаем его обозначения):

$$l = nt + \varepsilon = L + \tau; \quad l' = n't + \varepsilon' = L' + \tau',$$

и положил

$$\lambda = l + \tau' - \tau, \tag{5.4}$$

что дает

$$L = \lambda - \tau'; \quad L' = l' - \tau'. \tag{5.5}$$

С другой стороны, замечая, что

$$\pi = \tau + \Pi; \quad \pi' = \tau' + \Pi',$$

и положив

$$\omega = \pi + \tau' - \tau = \Pi + \tau', \tag{5.6}$$

будем иметь

$$\Pi = \omega - \tau'; \quad \Pi' = \pi' - \tau'. \tag{5.7}$$

Из разложения (5.1) исключим M и M' при помощи равенств (5.2) и в полученный ряд подставим выражения (5.5) и (5.7). Это даст

$$R_{0,1} = \sum K e^h e'^{h'} \nu^f \cos(j\lambda + j'l' + k\omega + k'\pi' - 2g\tau'). \tag{5.8}$$

Легко видеть, что числа j, j', k, k', $2g$ связаны соотношением

$$j + j' + k + k' - 2g = 0,$$

которое является следствием независимости функции (5.8) от начала счета долгот.

Форма (5.8) разложения пертурбационной функции была использована Леверрье для построения теорий движения больших планет. Он дал разложение (5.8) в развернутом виде до членов седьмой степени относительно e, e' и J включительно [Леверрье, 1855]. Это разложение содержит 469 членов. Боке [1885] продолжил его до членов восьмой степени включительно.

Метод, использованный в этих работах для разложения по степеням эксцентриситетов, подробно изложен Тиссераном [1889].

§ 6. Начальные члены разложения пертурбационной функции

Во многих случаях бывает полезно иметь первые члены разложения пертурбационной функции. Выполним поэтому операции, указанные в предыдущих параграфах, ограничиваясь членами второй степени. С такою точностью разложение было получено впервые Лагранжем и Лапласом. Это позволило им либо объяснить, либо открыть некоторые весьма существенные особенности движения тел солнечной системы, чего не мог сделать Эйлер, ограничивавшийся членами первой степени.

Выполнив указанные в § 4 операции для главной части первой из пертурбационных функций (1.1), мы получим, как легко проверить, следующее разложение:

$$\begin{aligned}
k^2m'\Delta^{-1} = k^2m'(a')^{-1}\sum\Big\{\Big[\frac{1}{2}c_1^{(i)} - \frac{1}{2}\nu c_3^{(i-1)} &+ \\
+\frac{1}{8}(e^2+e'^2)(-4i^2+D+D^2)c_1^{(i)}\Big]\cos iS &+ \\
+\frac{1}{2}e(-2i-D)c_1^{(i)}\cos(iS+M) &+ \\
+\frac{1}{2}e'(2i+1+D)c_1^{(i)}\cos(iS+M') &+ \\
+\frac{1}{8}e^2[4i^2-5i+(4i-3)D+D^2]c_1^{(i)}\cos(iS+2M) &+ \\
+\frac{1}{4}ee'(4i^2+2i-D-D^2)c_1^{(i)}\cos(iS-M+M') &+ \\
+\frac{1}{4}ee'[-4i^2-2i-(4i+1)D-D^2]c_1^{(i)}\cos(iS+M+M') &+ \\
+\frac{1}{8}e'^2[4i^2+9i+4+(4i+5)D+D^2]c_1^{(i)}\cos(iS+2M') &+ \\
+\frac{1}{2}\nu c_3^{(i-1)}\cos(iS+2L) + \ldots\Big\}. &\qquad (6.1)
\end{aligned}$$

Здесь для краткости положено

$$S = L' - L; \quad D = \frac{\partial}{\partial(\ln\alpha)};$$

суммирование ведется по $i=0, \pm1, \pm2, \ldots$.

Хотя вторая часть каждой из функций (1.1) может быть учтена при помощи способа, указанного в конце § 3, представляет интерес иметь разложения этих частей в явной форме. Такие разложения могут быть легко получены из (6.1) при помощи следующих соображений.

Если эксцентриситеты e и e' равны нулю, то главная часть и вторая часть выражаются соответственно формулами (3.7) и (3.8). Сравнение этих формул показывает, что вторая часть функции $R_{0,1}$ получается из главной части, если в этой последней положить

$$c_1^{(1)} = c_1^{(-1)} = \alpha; \quad c_3^{(0)} = 2\alpha,$$

а все остальные величины $c_k^{(i)}$ заменить нулями. Учитывая это, из формулы (6.1) непосредственно находим для второй части пертурбационной функции $R_{0,1}$ такое выражение:

$$k^2m'r(r')^{-2}\cos H = k^2m'a'^{-1}\alpha\Big\{\Big(1-\frac{1}{2}e^2-\frac{1}{2}e'^2-\nu\Big)\cos(L'-L)-$$
$$-\frac{3}{2}e\cos(L'-\Pi)+\frac{1}{2}e\cos(L'-2L+\Pi)+$$
$$+2e'\cos(2L'-L-\Pi')+$$
$$+\frac{1}{8}e^2\cos(L'+L-2\Pi)+\frac{3}{8}e^2\cos(L'-3L+2\Pi)+$$
$$+ee'\cos(2L'-2L-\Pi'+\Pi)-3ee'\cos(2L'-\Pi'-\Pi)+$$
$$+\frac{1}{8}e'^2\cos(L'+L-2\Pi')+\frac{27}{8}e'^2\cos(3L'-L-2\Pi')+$$
$$+\nu\cos(L'+L)+\ \ldots\Big\}. \qquad (6.2)$$

Точно так же второе из выражений (3.8) получается из (3.7), если положить

$$c_1^{(1)}=c_1^{(-1)}=\alpha^{-2};\quad c_3^{(0)}=2\alpha^{-2},$$

а все остальные $c_k^{(l)}$ равными нулю. Сообразно с этим, вторая часть пертурбационной функции $R_{1,0}$ разлагается в ряд:

$$k^2mr'r^{-2}\cos H = k^2ma'^{-1}\alpha^{-2}\Big\{\Big(1-\frac{1}{2}e^2-\frac{1}{2}e'^2-\nu\Big)\cos(L'-L)+$$
$$+2e\cos(L'-2L+\Pi)-$$
$$-\frac{3}{2}e'\cos(L-\Pi')+\frac{1}{2}e'\cos(2L'-L-\Pi')+$$
$$+\frac{1}{8}e^2\cos(L'+L-2\Pi)+\frac{27}{8}e^2\cos(L'-3L+2\Pi)+$$
$$+ee'\cos(2L'-2L-\Pi'+\Pi)-3ee'\cos(2L-\Pi'-\Pi)+$$
$$+\frac{1}{8}e'^2\cos(L'+L-2\Pi')+\frac{3}{8}e'^2\cos(3L'-L-2\Pi')+$$
$$+\nu\cos(L'+L)+\ \ldots\Big\}. \qquad (6.3)$$

Мы уже видели (§ 14 гл. XVI), что вековая часть пертурбационной функции, иначе говоря, совокупность членов, не зависящих от средних аномалий рассматриваемых планет, получается от разложения главной части этой функции. Невозможность появления вековых членов при разложении вторых частей усматривается и из того способа, которым получаются выражения (6.2) и (6.3).

Таким образом, в принятых нами пределах точности вековая часть пертурбационной функции $R_{0,1}$ выражается так:

$$[R_{0,1}]=\frac{k^2m'}{a'}\left[\frac{1}{2}c_1^{(0)}-\frac{1}{2}\nu c_3^{(1)}+\frac{1}{8}(e^2+e'^2)(D+D^2)c_1^{(0)}+\right.$$
$$\left.+\frac{1}{4}ee'(2-D-D^2)c_1^{(1)}\cos(\Pi'-\Pi)\right]. \quad (6.4)$$

Это выражение можно представить в несколько ином виде. Так как

$$\Pi'-\Pi=(\pi'-\tau')-(\pi-\tau)=\pi'-\pi-(\tau'-\tau),$$

а разность $\tau'-\tau$ есть величина второго порядка относительно J, как это было показано в § 2, то в пределах принятой точности можно заменить $\cos(\Pi'-\Pi)$ через $\cos(\pi'-\pi)$.

С другой стороны, соотношение

$$2\nu=2\sin^2\frac{J}{2}=1-\cos J=1-\cos i\cos i'-\sin i\sin i'\cos(\Omega'-\Omega),$$

или

$$2\nu=2\sin^2\frac{i}{2}+2\sin^2\frac{i'}{2}\cos i-\sin i\sin i'\cos(\Omega'-\Omega)$$

позволяет с принятой нами точностью заменить 2ν через

$$\frac{1}{2}\operatorname{tg}^2 i+\frac{1}{2}\operatorname{tg}^2 i'-\operatorname{tg} i\operatorname{tg} i'\cos(\Omega'-\Omega).$$

Таким образом, формулу (6.4) мы можем заменить такой:

$$[R_{0,1}]=k^2m'\{M_{0,1}+N_{0,1}[e^2+e'^2-\operatorname{tg}^2 i-\operatorname{tg}^2 i'+$$
$$+2\operatorname{tg} i\operatorname{tg} i'\cos(\Omega'-\Omega)]-2P_{0,1}ee'\cos(\pi'-\pi)\}. \quad (6.5)$$

Через $M_{0,1}$, $N_{0,1}$, $P_{0,1}$ здесь обозначены коэффициенты, зависящие только от a и a'. Фигурная скобка в выражении (6.5) есть результат осреднения по времени величины Δ^{-1}, которая симметрична относительно рассматриваемых планет. Отсюда следует, что $M_{0,1}$, $N_{0,1}$, $P_{0,1}$ суть симметрические функции a и a'.

Так, например, из (3.4) и (3.5) следует, что

$$a'^{-1}c_n^{(i)}=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{(aa')^{\frac{n-1}{2}}\cos iS\,dS}{(a^2+a'^2-2aa'\cos S)^{\frac{n}{2}}}$$

есть симметрическая функция a и a'.

Примечание. Если использовать разложения функций эллиптического движения, изученные в гл. VI, то легко получить для вторых частей пертурбационных функций разложения в тригонометрические ряды по кратным средних аномалий другого вида. В отличие от разложений, получаемых из (6.2) и (6.3), в этих разложениях мы будем иметь выражение общего члена. Он будет выражен через бесселевы функции эксцентриситетов.

§ 7. Вычисление коэффициентов Лапласа

При использовании рассмотренных в предыдущих параграфах разложений пертурбационной функции приходится вычислять функции $c_n^{(i)}$ отношения больших полуосей $\alpha = a/a'$. Эта задача приводится в силу формулы (3.5) к нахождению коэффициентов Лапласа, определяемых равенством

$$(1 - 2\alpha\cos S + \alpha^2)^{-\frac{n}{2}} = \frac{1}{2}\sum_{-\infty}^{+\infty} b_n^{(i)} \cos iS \tag{7.1}$$

и условием $b_n^{(-i)} = b_n^{(i)}$, для $n = 1, 3, 5, \ldots$.

Покажем, прежде всего, что величины $b_n^{(i)}$ могут быть вычислены при помощи степенных рядов.

Положив

$$z = \exp\left(S\sqrt{-1}\right),$$

будем иметь

$$1 - 2\alpha\cos S + \alpha^2 = 1 + \alpha^2 - \alpha(z + z^{-1}) = (1 - \alpha z)(1 - \alpha z^{-1}).$$

Следовательно, равенство (7.1) можно заменить таким:

$$(1 - \alpha z)^{-\frac{n}{2}}(1 - \alpha z^{-1})^{-\frac{n}{2}} = \frac{1}{2}\sum_{-\infty}^{+\infty} b_n^{(i)} z^i. \tag{7.2}$$

Так как

$$(1 - \alpha z^{\pm 1})^{-\frac{n}{2}} = 1 + \frac{n}{2}\alpha z^{\pm 1} + \frac{n(n+2)}{2\cdot 4}\alpha^2 z^{\pm 2} + \ldots,$$

то, приравняв коэффициенты при z^i, мы получим для $i \geqslant 0$ такое разложение:

$$\frac{1}{2} b_n^{(i)} = \frac{n(n+2)\ldots(n+2i-2)}{2\cdot 4\ldots(2i)}\alpha^i\left[1 + \frac{n}{2}\frac{n+2i}{2i+2}\alpha^2 + \right.$$
$$\left. + \frac{n(n+2)}{2\cdot 4}\frac{(n+2i)(n+2i+2)}{(2i+2)(2i+4)}\alpha^4 + \ldots\right]. \tag{7.3}$$

В частности, при $i = 0$ имеем

$$\frac{1}{2} b_n^{(0)} = 1 + \left(\frac{n}{2}\right)^2 \alpha^2 + \left(\frac{n(n+2)}{2\cdot 4}\right)^2 \alpha^4 + \ldots \tag{7.4}$$

Ряд (7.3) сходится при $|\alpha| < 1$, но сходимость его достаточно быстрая лишь при малых значениях $|\alpha|$. Кроме того, быстрота сходимости убывает при возрастании n.