нометрические ряды по кратным средних аномалий другого вида. В отличие от разложений, получаемых из (6.2) и (6.3), в этих разложениях мы будем иметь выражение общего члена. Он будет выражен через бесселевы функции эксцентриситетов.

§ 7. Вычисление коэффициентов Лапласа

При использовании рассмотренных в предыдущих параграфах разложений пертурбационной функции приходится вычислять функции $c_n^{(i)}$ отношения больших полуосей $\alpha = a/a'$. Эта задача приводится в силу формулы (3.5) к нахождению коэффициентов Лапласа, определяемых равенством

$$(1-2\alpha\cos S+\alpha^2)^{-\frac{n}{2}} = \frac{1}{2}\sum_{-\infty}^{+\infty} b_n^{(i)}\cos iS \tag{7.1}$$

и условием $b_n^{(-i)} = b_n^{(i)}$, для $n=1, 3, 5, \ldots$.

Покажем, прежде всего, что величины $b_n^{(i)}$ могут быть вычислены при помощи степенных рядов.

Положив

$$z = \exp(S\sqrt{-1}),$$

будем иметь

$$1-2\alpha\cos S+\alpha^2 = 1+\alpha^2-\alpha(z+z^{-1}) = (1-\alpha z)(1-\alpha z^{-1}).$$

Следовательно, равенство (7.1) можно заменить таким:

$$(1-\alpha z)^{-\frac{n}{2}}(1-\alpha z^{-1})^{-\frac{n}{2}} = \frac{1}{2}\sum_{-\infty}^{+\infty} b_n^{(i)} z^i. \tag{7.2}$$

Так как

$$(1-\alpha z^{\pm 1})^{-\frac{n}{2}} = 1+\frac{n}{2}\alpha z^{\pm 1}+\frac{n(n+2)}{2\cdot 4}\alpha^2 z^{\pm 2}+\ \ldots,$$

то, приравняв коэффициенты при z^i, мы получим для $i \geqslant 0$ такое разложение:

$$\frac{1}{2}b_n^{(i)} = \frac{n(n+2)\ldots(n+2i-2)}{2\cdot 4\ldots(2i)}\alpha^i\left[1+\frac{n}{2}\,\frac{n+2i}{2i+2}\alpha^2+\right.$$
$$\left.+\frac{n(n+2)}{2\cdot 4}\,\frac{(n+2i)(n+2i+2)}{(2i+2)(2i+4)}\alpha^4+\ \ldots\right]. \tag{7.3}$$

В частности, при $i=0$ имеем

$$\frac{1}{2}b_n^{(0)} = 1+\left(\frac{n}{2}\right)^2\alpha^2+\left(\frac{n(n+2)}{2\cdot 4}\right)^2\alpha^4+\ \ldots \tag{7.4}$$

Ряд (7.3) сходится при $|\alpha|<1$, но сходимость его достаточно быстрая лишь при малых значениях $|\alpha|$. Кроме того, быстрота сходимости убывает при возрастании n.

Другие, более выгодные в вычислительном отношении разложения дает теория гипергеометрических функций.

Если воспользоваться общепринятым обозначением гипергеометрического ряда

$$F(A,\ B,\ C;\ x)=1+\frac{AB}{1\cdot C}x+\frac{A(A+1)B(B+1)}{1\cdot 2\cdot C(C+1)}x^2+\ \dots \tag{7.5}$$

и символом

$$(k,\ i)=k(k+1)\ \dots\ (k+i-1) \qquad (k,\ 0)=1,$$

то формулу (7.3) можно написать так:

$$\frac{1}{2}b_n^{(i)}=\frac{(n/2,\ i)}{(1,\ i)}\alpha^i F\left(\frac{n}{2},\ \frac{n}{2}+i,\ i+1;\ \alpha^2\right). \tag{7.6}$$

Хорошо известное соотношение

$$F(A,\ B,\ C;\ x)=(1-x)^{-A}F\left(A,\ C-B,\ C;\ \frac{-x}{1-x}\right)$$

показывает, что

$$\frac{1}{2}b_n^{(i)}=\frac{(n/2,\ i)}{(1,\ i)}\alpha^i(1-\alpha^2)^{-\frac{n}{2}}F\left(\frac{n}{2},\ 1-\frac{n}{2},\ i+1;\ -p\right),$$

где

$$p=\frac{\alpha^2}{1-\alpha^2}.$$

Это дает ряд

$$\frac{1}{2}b_n^{(i)}=\frac{n(n+2)\dots(n+2i-2)}{2\cdot 4\cdot 6\dots(2i)}\alpha^i(1-\alpha^2)^{-\frac{n}{2}}\left[1+\frac{n}{2}\frac{n-2}{2i+2}p+\right.$$
$$\left.+\frac{n(n+2)}{2\cdot 4}\frac{(n-2)(n-4)}{(2i+2)(2i+4)}p^2+\ \dots\right] \tag{7.7}$$

сходящийся при $|p|<1$, иначе говоря, при

$$|\alpha|<1/\sqrt{2}=0{,}707\ \dots$$

Другой путь для вычисления коэффициентов Лапласа открывает формула

$$b_n^{(i)}=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(1+\alpha^2-2\alpha\cos x)^{-\frac{n}{2}}\cos ix\,dx, \tag{7.8}$$

непосредственно вытекающая из равенства (7.1).

В таком виде эта формула неудобна для применения метода квадратур при сколько-нибудь значительных i, поскольку число колебаний подынтегральной функции в этих случаях велико. Но из нее могут быть получены другие, более удобные.

Легко проверяемое соотношение

$$\int_0^\pi \cos^p x \cos ix\,dx = \frac{p(p-1)\ldots(p-i+1)}{1\cdot 3\cdot 5\ldots(2i-1)} \int_0^\pi \cos^{p-i} x \sin^{2i} x\,dx$$

дает для каждой функции $f(t)$, разложимой в ряд

$$f(t) = \sum_0^\infty a_p t^p,$$

сходящийся при $|t| \leqslant 1$, формулу Якоби:

$$\int_0^\pi f(\cos x)\cos ix\,dx = \frac{1}{1\cdot 3\cdot 5\ldots(2i-1)} \int_0^\pi f^{(i)}(\cos x)\sin^{2i} x\,dx.$$

Применив эту формулу к интегралу (7.8), получим

$$b_n^{(i)} = \frac{n(n+2)\ldots(n+2i-2)}{1\cdot 3\cdot 5\ldots(2i-1)} \frac{2}{\pi}\alpha^i \int_0^\pi (1+\alpha^2-2\alpha\cos x)^{-\frac{n}{2}-i} \sin^{2i} x\,dx. \tag{7.9}$$

Если воспользоваться преобразованием Ландена

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{\sin x}{\cos x - \alpha},$$

$$\sin\varphi = \frac{\sin x}{\sqrt{1+\alpha^2-2\alpha\cos x}}; \quad d\varphi = \frac{1-\alpha\cos x}{1+\alpha^2-2\alpha\cos x}\,dx,$$

то из формулы (7.9) легко получить такую:

$$b_n^{(i)} = \frac{n(n+2)\ldots(n+2i-2)}{1\cdot 3\cdot 5\ldots(2i-1)} \frac{2}{\pi}\alpha^i \times$$

$$\times \int_0^\pi \left[\frac{\alpha\cos\varphi + \sqrt{1-\alpha^2\sin^2\varphi}}{1-\alpha^2}\right]^{n-1} \frac{\sin^{2i}\varphi\,d\varphi}{\sqrt{1-\alpha^2\sin^2\varphi}}. \tag{7.10}$$

Применение формул квадратур к интегралам, стоящим в формуле (7.9) или (7.10), дает самый лучший способ для получения коэффициентов Лапласа во всех случаях, когда употребление небольшого числа первых членов рядов (7.3) и (7.7) не может обеспечить нужную точность.

Из формулы (7.10) легко получить соотношения

$$b_1^{(0)} = \frac{4}{\pi} \int_0^{\pi/2} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-\alpha^2\sin^2\varphi}} = \frac{4}{\pi} F\left(\alpha, \frac{\pi}{2}\right) \tag{7.11}$$

$$b_1^{(1)} = \frac{4\alpha}{\pi} \int_0^{\pi/2} \frac{\sin^2\varphi\,d\varphi}{\sqrt{1-\alpha^2\sin^2\varphi}} = \frac{4}{\pi\alpha}\left[F\left(\alpha, \frac{\pi}{2}\right) - E\left(\alpha, \frac{\pi}{2}\right)\right], \tag{7.12}$$

выражающие первые два коэффициента Лапласа через полные эллиптические интегралы первого и второго рода. Для нахождения этих последних существуют многочисленные таблицы [Лебедев и Федорова, 1956], а также весьма эффективные способы прямого вычисления. Флетчер [1938] дал таблицы коэффициентов $b_1^{(0)}$ и $b_1^{(1)}$ с одиннадцатью знаками до $\alpha=0{,}995$.

§ 8. Рекуррентные соотношения

Равенство (7.2), которое может служить для определения коэффициентов Лапласа, напишем так:

$$[1+\alpha^2-\alpha(z+z^{-1})]^{-\frac{n}{2}}=\frac{1}{2}\sum b_n^{(l)}z^l. \tag{8.1}$$

Соотношение

$$\frac{1}{2}n\alpha(1-z^{-2})[1+\alpha^2-\alpha(z+z^{-1})]^{-\frac{n}{2}-1}=\frac{1}{2}\sum lb_n^{(l)}z^{l-1},$$

получающееся дифференцированием равенства (8.1) по z, может быть написано в двух следующих формах:

$$\frac{1}{2}n\alpha(1-z^{-2})\sum b_n^{(l)}z^l=[1+\alpha^2-\alpha(z+z^{-1})]\sum lb_n^{(l)}z^{l-1}, \tag{8.2}$$

$$\frac{1}{2}n\alpha(1-z^{-2})\sum b_{n+2}^{(l)}z^l=\sum lb_n^{(l)}z^{l-1}. \tag{8.3}$$

Приравняв коэффициенты при z^{l-1} в обеих частях равенства (8.2), получим

$$(2l-n+2)\,b_n^{(l+1)}=2l(\alpha+\alpha^{-1})b_n^{(l)}-(2l+n-2)\,b_n^{(l-1)}. \tag{8.4}$$

Таким образом, если среди коэффициентов $b_n^{(l)}$, имеющих одинаковые нижние индексы, известны два с соседними верхними индексами, то последовательное применение соотношения (8.4) даст все остальные коэффициенты с тем же нижним индексом. Достаточно, например, непосредственно вычислить $b_n^{(0)}$ и $b_n^{(1)}$, чтобы найти при помощи (8.4) все $b_n^{(l)}$.

Обратимся теперь к выводу соотношений, связывающих $b_{n+2}^{(l)}$ и $b_n^{(l)}$. Приравняв коэффициенты при z^{l-1} в левой и правой частях равенства (8.3), будем иметь

$$\frac{1}{2}n\alpha\left(b_{n+2}^{(l-1)}-b_{n+2}^{(l+1)}\right)=lb_n^{(l)}. \tag{8.5}$$

С другой стороны, соотношение (8.1) после замены n через $n+2$ можно написать так:

$$[1+\alpha^2-\alpha(z+z^{-1})]\sum b_{n+2}^{(l)}z^l=\sum b_n^{(l)}z^l,$$