выражающие первые два коэффициента Лапласа через полные эллиптические интегралы первого и второго рода. Для нахождения этих последних существуют многочисленные таблицы [Лебедев и Федорова, 1956], а также весьма эффективные способы прямого вычисления. Флетчер [1938] дал таблицы коэффициентов $b_1^{(0)}$ и $b_1^{(1)}$ с одиннадцатью знаками до $\alpha=0{,}995$.

§ 8. Рекуррентные соотношения

Равенство (7.2), которое может служить для определения коэффициентов Лапласа, напишем так:

$$[1+\alpha^2-\alpha(z+z^{-1})]^{-\frac{n}{2}}=\frac{1}{2}\sum b_n^{(l)}z^l. \tag{8.1}$$

Соотношение

$$\frac{1}{2}n\alpha(1-z^{-2})[1+\alpha^2-\alpha(z+z^{-1})]^{-\frac{n}{2}-1}=\frac{1}{2}\sum lb_n^{(l)}z^{l-1},$$

получающееся дифференцированием равенства (8.1) по z, может быть написано в двух следующих формах:

$$\frac{1}{2}n\alpha\left(1-z^{-2}\right)\sum b_n^{(l)}z^l=\left[1+\alpha^2-\alpha\left(z+z^{-1}\right)\right]\sum lb_n^{(l)}z^{l-1}, \tag{8.2}$$

$$\frac{1}{2}n\alpha\left(1-z^{-2}\right)\sum b_{n+2}^{(l)}z^l=\sum lb_n^{(l)}z^{l-1}. \tag{8.3}$$

Приравняв коэффициенты при z^{l-1} в обеих частях равенства (8.2), получим

$$(2l-n+2)\,b_n^{(l+1)}=2l\left(\alpha+\alpha^{-1}\right)b_n^{(l)}-(2l+n-2)\,b_n^{(l-1)}. \tag{8.4}$$

Таким образом, если среди коэффициентов $b_n^{(l)}$, имеющих одинаковые нижние индексы, известны два с соседними верхними индексами, то последовательное применение соотношения (8.4) даст все остальные коэффициенты с тем же нижним индексом. Достаточно, например, непосредственно вычислить $b_n^{(0)}$ и $b_n^{(1)}$, чтобы найти при помощи (8.4) все $b_n^{(l)}$.

Обратимся теперь к выводу соотношений, связывающих $b_{n+2}^{(l)}$ и $b_n^{(l)}$. Приравняв коэффициенты при z^{l-1} в левой и правой частях равенства (8.3), будем иметь

$$\frac{1}{2}n\alpha\left(b_{n+2}^{(l-1)}-b_{n+2}^{(l+1)}\right)=lb_n^{(l)}. \tag{8.5}$$

С другой стороны, соотношение (8.1) после замены n через $n+2$ можно написать так:

$$\left[1+\alpha^2-\alpha\left(z+z^{-1}\right)\right]\sum b_{n+2}^{(l)}z^l=\sum b_n^{(l)}z^l,$$

откуда

$$(1+\alpha^2) b_{n+2}^{(i)} - \alpha\left(b_{n+2}^{(i-1)} + b_{n+2}^{(i+1)}\right) = b_n^{(i)}. \tag{8.6}$$

Исключение $b_{n+2}^{(i-1)}$ из соотношений (8.5) и (8.6) дает:

$$n(1+\alpha^2) b_{n+2}^{(i)} - 2n\alpha b_{n+2}^{(i+1)} = (n+2i)\, b_n^{(i)}. \tag{8.7}$$

Если из этих же соотношений исключить $b_{n+2}^{(i+1)}$, то получим

$$n(1+\alpha^2) b_{n+2}^{(i)} - 2\alpha n b_{n+2}^{(i-1)} = (n-2i)\, b_n^{(i)},$$

или, заменив i через $i+1$,

$$n(1+\alpha^2) b_{n+2}^{(i+1)} - 2n\alpha b_{n+2}^{(i)} = (n-2i-2)\, b_n^{(i+1)}. \tag{8.8}$$

Соотношения (8.7) и (8.8) дают возможность, зная коэффициенты $b_n^{(0)}$, $b_n^{(1)}$, ..., находить $b_{n+2}^{(0)}$, $b_{n+2}^{(1)}$, ... Выгодно, как заметил еще Лежандр, пользоваться следующими комбинациями этих соотношений:

$$\left.\begin{aligned} n(1-\alpha)^2\left(b_{n+2}^{(i)} + b_{n+2}^{(i+1)}\right) &= (2i+n)\, b_n^{(i)} - (2i-n+2)\, b_n^{(i+1)}, \\ n(1+\alpha)^2\left(b_{n+2}^{(i)} - b_{n+2}^{(i+1)}\right) &= (2i+n)\, b_n^{(i)} + (2i-n+2)\, b_n^{(i+1)}. \end{aligned}\right\} \tag{8.9}$$

Это позволяет находить неизвестные величины попарно: сначала $b_{n+2}^{(0)}$, $b_{n+2}^{(1)}$, затем $b_{n+2}^{(1)}$, $b_{n+2}^{(2)}$ и т. д. Каждый коэффициент $b_{n+2}^{(i)}$ получается здесь дважды, что дает полезный контроль без заметного увеличения работы.

Для очень малых значений α применение соотношения (8.4) сопровождается прогрессивно возрастающей потерей точности. То же самое имеет место для соотношений (8.9), если α близко к единице.

Были предложены и другие пути использования зависимостей, имеющих место между коэффициентами Лапласа с различными индексами [Тиссеран, 1889; Цейпель, 1912].

§ 9. Производные коэффициентов Лапласа

Для разложения пертурбационной функции в ряд нужно знать не только коэффициенты Лапласа, но и их производные по α.

Эти производные могут быть получены путем почленного дифференцирования выражений (7.3) или (7.7). Однако сходимость получающихся при этом рядов оказывается в большинстве случаев недостаточно быстрой. Предпочитают поэтому пользоваться линейными соотношениями, связывающими величины

$$D^k b_n^{(i)} \qquad (n=1,\ 3,\ 5,\ \ldots;\ k,\ i=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \ldots). \tag{9.1}$$