откуда

$$(1+\alpha^2)\,b_{n+2}^{(i)}-\alpha\left(b_{n+2}^{(i-1)}+b_{n+2}^{(i+1)}\right)=b_n^{(i)}. \tag{8.6}$$

Исключение $b_{n+2}^{(i-1)}$ из соотношений (8.5) и (8.6) дает:

$$n(1+\alpha^2)\,b_{n+2}^{(i)}-2n\alpha b_{n+2}^{(i+1)}=(n+2i)\,b_n^{(i)}. \tag{8.7}$$

Если из этих же соотношений исключить $b_{n+2}^{(i+1)}$, то получим

$$n(1+\alpha^2)\,b_{n+2}^{(i)}-2\alpha n b_{n+2}^{(i-1)}=(n-2i)\,b_n^{(i)},$$

или, заменив i через $i+1$,

$$n(1+\alpha^2)\,b_{n+2}^{(i+1)}-2n\alpha b_{n+2}^{(i)}=(n-2i-2)\,b_n^{(i+1)}. \tag{8.8}$$

Соотношения (8.7) и (8.8) дают возможность, зная коэффициенты $b_n^{(0)}$, $b_n^{(1)}$, ..., находить $b_{n+2}^{(0)}$, $b_{n+2}^{(1)}$, ... Выгодно, как заметил еще Лежандр, пользоваться следующими комбинациями этих соотношений:

$$\left.\begin{aligned} n(1-\alpha)^2\left(b_{n+2}^{(i)}+b_{n+2}^{(i+1)}\right)&=(2i+n)\,b_n^{(i)}-(2i-n+2)\,b_n^{(i+1)},\\ n(1+\alpha)^2\left(b_{n+2}^{(i)}-b_{n+2}^{(i+1)}\right)&=(2i+n)\,b_n^{(i)}+(2i-n+2)\,b_n^{(i+1)}. \end{aligned}\right\} \tag{8.9}$$

Это позволяет находить неизвестные величины попарно: сначала $b_{n+2}^{(0)}$, $b_{n+2}^{(1)}$, затем $b_{n+2}^{(1)}$, $b_{n+2}^{(2)}$ и т. д. Каждый коэффициент $b_{n+2}^{(i)}$ получается здесь дважды, что дает полезный контроль без заметного увеличения работы.

Для очень малых значений α применение соотношения (8.4) сопровождается прогрессивно возрастающей потерей точности. То же самое имеет место для соотношений (8.9), если α близко к единице.

Были предложены и другие пути использования зависимостей, имеющих место между коэффициентами Лапласа с различными индексами [Тиссеран, 1889; Цейпель, 1912].

§ 9. Производные коэффициентов Лапласа

Для разложения пертурбационной функции в ряд нужно знать не только коэффициенты Лапласа, но и их производные по α.

Эти производные могут быть получены путем почленного дифференцирования выражений (7.3) или (7.7). Однако сходимость получающихся при этом рядов оказывается в большинстве случаев недостаточно быстрой. Предпочитают поэтому пользоваться линейными соотношениями, связывающими величины

$$D^k b_n^{(i)} \qquad (n=1,\ 3,\ 5,\ \ldots;\ k,\ i=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \ldots). \tag{9.1}$$

Такие соотношения легко получить при помощи дифференцирования по α равенства (8.1). Их можно найти у Леверрье [1855] и Тиссерана [1889]. Мы не будем на них останавливаться, поскольку в изложенном выше способе разложения пертурбационной функции вместо величин (9.1) употребляются величины

$$D^k c_n^{(i)} = \frac{d^k}{(d \ln \alpha)^k} \left(\alpha^{\frac{n-1}{2}} b_n^{(i)} \right). \tag{9.2}$$

Для нахождения величин (9.2) Ньюкомом был разработан следующий, весьма эффективный способ, основанный на использовании свойств гипергеометрических функций [Ньюком, 1891, 1895а].

Формула (7.6) показывает, что

$$c_n^{(i)} = 2 \frac{(n/2, i)}{(1, i)} \alpha^{\frac{1}{2}(n+2i-1)} F\left(\frac{n}{2}, \frac{n}{2}+i, i+1; \alpha^2\right). \tag{9.3}$$

Ньюком вводит в рассмотрение величины, определяемые более общим выражением

$$c_n^{i,j} = 2^{j+1} \left(\frac{n}{2}, j\right) \frac{(n/2, i+j)}{(1, i+j)} \alpha^{\frac{1}{2}(n+2i+4j-1)} \times$$
$$\times F\left(\frac{n}{2}+j, \frac{n}{2}+i+j, i+j+1; \alpha^2\right). \tag{9.4}$$

При $j=0$ это выражение обращается в (9.3).

Разложение гипергеометрической функции

$$F(A, B, C; x) = 1 + \frac{AB}{1 \cdot C} x + \frac{A(A+1) B(B+1)}{1 \cdot 2 \cdot C (C+1)} x^2 + \ldots \tag{9.5}$$

показывает, что

$$\frac{d}{dx} F(A, B, C; x) = \frac{AB}{C} F(A+1, B+1, C+1; x).$$

Следовательно,

$$DF(A, B, C; \alpha^2) = 2\alpha^2 \frac{AB}{C} F(A+1, B+1, C+1; \alpha^2),$$

а потому, как легко убедиться,

$$Dc_n^{i,j} = \frac{1}{2}(n+2i+4j-1) c_n^{i,j} + c_n^{i,j+1}.$$

Применив к обеим частям этого равенства операцию D^k, будем иметь

$$D^{k+1} c_n^{i,j} = \frac{1}{2}(n+2i+4j-1) D^k c_n^{i,j} + D^k c_n^{i,j+1} \tag{9.6}$$
$$(n=1, 3, 5, \ldots; \ i, j, k = 0, 1, 2, \ldots).$$

Таким образом, зная величины $c_n^{i,j}$, мы можем найти сначала $Dc_n^{i,j}$, затем $D^2c_n^{i,j}$, и т. д. Этим самым станут известны и нужные нам величины (9.2).

Обратимся теперь к нахождению величин (9.4). Решение этой задачи разделим на три части.

Покажем, прежде всего, как, зная $c_n^{0,j}$, найти $c_n^{i,j}$ для $i=1, 2, \ldots$.

Выражение (9.4) показывает, что

$$c_n^{i-1,j}=LF(A, B, C; \alpha^2);$$

$$c_n^{i,j}=L\frac{n+2i+2j-2}{2i+2j}\alpha F(A, B+1, C+1; \alpha^2),$$

$$c_n^{i+1,j}=L\frac{(n+2i+2j-2)(n+2i+2j)}{(2i+2j)(2i+2j+2)}\alpha^2F(A, B+2, C+2; \alpha^2),$$

где выделен общий множитель

$$L=2^{j+1}\left(\frac{n}{2}, j\right)\frac{(n/2, i+j-1)}{(1, i+j-1)}\alpha^{\frac{1}{2}(n+2i+4j-8)}$$

и для краткости положено

$$A=n/2+j;\quad B=n/2+i+j-1;\quad C=i+j.$$

Воспользуемся теперь следующим свойством гипергеометрических функций, легко доказываемым при помощи ряда (9.5):

$$C(C+1)F(A, B, C; x)-$$
$$-(C+1)[C+(B-A+1)x]F(A, B+1, C+1; x)+$$
$$+(B+1)(C-A+1)xF(A, B+2, C+2; x)=0.$$

Это даст

$$(2i+2j+n-2)\alpha c_n^{i-1,j}-2(i+j+i\alpha^2)c_n^{i,j}+$$
$$+(2i-n+2)\alpha c_n^{i+1,j}=0. \qquad (9.7)$$

Введем вспомогательные величины

$$p_n^{i,j}=c_n^{i,j}/c_n^{i-1,j}\qquad (i=1, 2, \ldots) \qquad (9.8)$$

и положим

$$P_n^{i,j}=\frac{(2i+2j+n-2)\alpha}{2i(1+\alpha^2)+2j};\quad Q_n^{i,j}=\frac{(2i-n+2)\alpha}{2i(1+\alpha^2)+2j}.$$

Тогда соотношение (9.7) можно будет представить в таком виде:

$$p_n^{i,j}=P_n^{i,j}/(1-Q_n^{i,j}p_n^{i+1,j}). \qquad (9.9)$$

Эта формула позволяет найти величину (9.8) для $i=k-1, k-2, \ldots, 2, 1$, если она известна для $i=k$. Что же касается вычисления этого отношения при $i=k$, то оно может быть выполнено при помощи следующей цепной дроби, непосредственно вытекающей из формулы (9.9), а именно:

$$p_n^{k,j} = \cfrac{P_k}{1 - \cfrac{Q_k P_{k+1}}{1 - \cfrac{Q_{k+1} P_{k+2}}{1 - \dots}}} \tag{9.10}$$

Здесь для краткости положено

$$P_k = P_n^{k,j}; \quad Q_k = Q_n^{k,j}.$$

Заметим, что

$$P_\infty = Q_\infty = \alpha/(1+\alpha^2).$$

Итак, первая часть задачи, состоящая в нахождении отношений (9.8), решена.

Вторая часть задачи заключается в вычислении величин $c_1^{0,j}$. Так как величина

$$c_1^{0,0} = c_1^{(0)} = b_1^{(0)} \tag{9.11}$$

находится без затруднений при помощи формулы (7.4) или (7.11), то вопрос приводится к последовательному нахождению $c_1^{0,1}$, $c_1^{0,2}$, ... Это может быть сделано при помощи рекуррентного соотношения, которое мы сейчас выведем.

Общая формула (9.4) дает

$$c_n^{1,j} = MF(A, B, C; \alpha^2),$$

$$c_n^{1,j+1} = M(n+2j)\frac{n+2j+2}{2j+4}\alpha^2 F(A+1, B+1, C+1; \alpha^2),$$

$$c_n^{0,j+1} = M(n+2j)\alpha F(A+1, B, C; \alpha^2),$$

где выделен общий множитель

$$M = 2^{j+1}\left(\frac{n}{2}, j\right)\frac{(n/2, j+1)}{(1, j+1)}\alpha^{\frac{1}{2}(n+4j+1)}$$

и положено

$$A = n/2 + j; \quad B = n/2 + j + 1; \quad C = j + 2.$$

При помощи разложений (9.5) легко проверить, что

$$CF(A, B, C; x) - CF(A+1, B, C; x) + \\ + BxF(A+1, B+1, C+1; x) = 0.$$

Поэтому

$$(n+2j)\alpha c_n^{1,j} - c_n^{0,j+1} + \alpha c_n^{1,j+1} = 0.$$

Пользуясь опять величинами (9.8), напишем это равенство в форме

$$c_1^{0,j+1} = \frac{(2j+1)\alpha p_1^{1,j} c_1^{0,j}}{1 - \alpha p_1^{1,j+1}}. \tag{9.12}$$

Так как величины (9.8) и (9.11) уже известны, то повторное применение соотношения (9.12) даст все величины $c_1^{0,1}$, $c_1^{0,2}$, ...

Третья и последняя часть задачи заключается в нахождении $c_n^{0,j}$, где $n=3, 5, \dots$.

Чтобы выразить эти величины через уже найденные, рассмотрим величины

$$c_n^{0,j}=NF(A, B, C; \alpha^2),$$

$$c_{n+2}^{0,j}=N\left(\frac{n+2j}{n}\right)^2 \alpha F(A+1, B+1, C; \alpha^2),$$

$$c_{n+2}^{1,j}=N\left(\frac{n+2j}{n}\right)^2 \frac{n+2j+2}{2j+2} \alpha^2 F(A+1, B+2, C+1; \alpha^2),$$

где

$$N=2^{j+1}\left(\frac{n}{2}, j\right)\frac{(n/2, j)}{(1, j)}\alpha^{\frac{1}{2}(n+4j-1)},$$

$$A=n/2+j; \quad B=n/2+j; \quad C=j+1.$$

Пользуясь зависимостью между гипергеометрическими функциями, выражаемой равенством

$$C(A-C+1)F(A, B, C; x)-$$
$$-C(A-C+1+Bx)F(A+1, B+1, C, x)+$$
$$+(A+1)(A-C+1+Bx)F(A+1, B+2, C+1; x)=0,$$

получим

$$(n+2j)^2 \alpha c_n^{0,j}-[n^2+n(n+2j)\alpha^2]\, c_{n+2}^{0,j}+2n(n+j)\alpha c_{n+2}^{1,j}=0,$$

откуда

$$c_{n+2}^{0,j}=\frac{(n+2j)^2 \alpha c_n^{0,j}}{n^2+n(n+2j)\alpha^2-2n(n+j)\alpha p_{n+2}^{1,j}}. \tag{9.13}$$

Эта формула полностью решает задачу последовательного вычисления $c_3^{0,j}$, $c_5^{0,j}$, ... по уже найденным $c_1^{0,j}$.

§ 10. Дополнительные замечания

Коэффициенты Лапласа и их производные являются функциями одной независимой переменной α, а потому могут быть удобно табулированы.

Таблицы Ранкля [1855] позволяют находить логарифмы величин

$$d^j b_n^{(i)}/d\alpha^j$$

для $\alpha=0{,}000(0{,}005)\dots0{,}750$, если $n=1, 3, 5$; $i=0, 1, 2, \dots, 9$; $j=0, 1, \dots, 5$. Логарифмы даются с семью, шестью и пятью десятичными знаками в зависимости от величины индексов. Для наибольших значений индексов вместо готовых значений даются