Так как величины (9.8) и (9.11) уже известны, то повторное применение соотношения (9.12) даст все величины $c_1^{0,1}$, $c_1^{0,2}$, ...

Третья и последняя часть задачи заключается в нахождении $c_n^{0,j}$, где $n=3, 5, \ldots$.

Чтобы выразить эти величины через уже найденные, рассмотрим величины

$$c_n^{0,j}=NF(A, B, C; \alpha^2),$$

$$c_{n+2}^{0,j}=N\left(\frac{n+2j}{n}\right)^2\alpha F(A+1, B+1, C; \alpha^2),$$

$$c_{n+2}^{1,j}=N\left(\frac{n+2j}{n}\right)^2\frac{n+2j+2}{2j+2}\alpha^2 F(A+1, B+2, C+1; \alpha^2),$$

где

$$N=2^{j+1}\left(\frac{n}{2}, j\right)\frac{(n/2, j)}{(1, j)}\alpha^{\frac{1}{2}(n+4j-1)},$$

$$A=n/2+j; \quad B=n/2+j; \quad C=j+1.$$

Пользуясь зависимостью между гипергеометрическими функциями, выражаемой равенством

$$C(A-C+1)F(A, B, C; x)-$$
$$-C(A-C+1+Bx)F(A+1, B+1, C, x)+$$
$$+(A+1)(A-C+1+Bx)F(A+1, B+2, C+1; x)=0,$$

получим

$$(n+2j)^2\alpha c_n^{0,j}-[n^2+n(n+2j)\alpha^2]c_{n+2}^{0,j}+2n(n+j)\alpha c_{n+2}^{1,j}=0,$$

откуда

$$c_{n+2}^{0,j}=\frac{(n+2j)^2\alpha c_n^{0,j}}{n^2+n(n+2j)\alpha^2-2n(n+j)\alpha p_{n+2}^{1,j}}. \tag{9.13}$$

Эта формула полностью решает задачу последовательного вычисления $c_3^{0,j}$, $c_5^{0,j}$, ... по уже найденным $c_1^{0,j}$.

§ 10. Дополнительные замечания

Коэффициенты Лапласа и их производные являются функциями одной независимой переменной α, а потому могут быть удобно табулированы.

Таблицы Ранкля [1855] позволяют находить логарифмы величин

$$d^j b_n^{(i)}/d\alpha^j$$

для $\alpha=0{,}000(0{,}005)\ldots 0{,}750$, если $n=1, 3, 5$; $i=0, 1, 2, \ldots, 9$; $j=0, 1, \ldots, 5$. Логарифмы даются с семью, шестью и пятью десятичными знаками в зависимости от величины индексов. Для наибольших значений индексов вместо готовых значений даются ряды, расположенные по степеням α, с уже вычисленными коэффициентами.

Таблицы Брауна и Брауэра [1933] дают по аргументу $p = \alpha^2/(1-\alpha^2)$ логарифмы функции $G^{(i)}_{n/2}$, определяемой равенством

$$b^{(i)}_n = \alpha^i (1-\alpha^2)^{-n/2} G^{(i)}_{n/2}$$

для $p=0{,}00(0{,}01)\ldots 2{,}50$ (что соответствует изменению α от 0 до 0,845), причем $i=0, 1, 2, \ldots, 11$. Эти логарифмы даются с восемью десятичными знаками для $n=1, 3, 5$ и с семью для $n=7$.

Таблицы содержат, кроме того, значения функций $K^{(i)}_{1/2}$, $K^{(i)}_{3/2}$, определяемых равенствами

$$b^{(i)}_n = (1-\alpha^2)^{-1} K^{(i)}_{n/2}, \qquad n = 1, 3$$

для $i=0, 1, 2, 3, 4$. Аргументом здесь служит α, изменяющееся от 0,900 до 0,950.

Наличие этих таблиц в большинстве случаев избавляет от необходимости вычислять коэффициенты Лапласа. Рекуррентные соотношения, рассмотренные нами в § 8, могут быть использованы для контроля.

Для перехода от производных по α к нужным нам производным по $\ln\alpha$ служит соотношение

$$(\alpha d/d\alpha)^k = D(D-1)(D-2)\ldots(D-k+1).$$

При прямом нахождении производных (9.2) способом, указанным в предыдущем параграфе, важное значение имеет вычисление отношений (9.8). Это вычисление начинается с наибольшего нужного нам значения $i=k$ и выполняется при помощи цепной дроби (9.10).

Если α велико, то цепную дробь (9.10) можно заменить другой, сходящейся значительно быстрее. Для этого заметим, что

$$p^{k,j}_n = \frac{c^{k,j}_n}{c^{k-1,j}_n} = \frac{n+2k+2j-2}{2k+2j}\,\alpha\,\frac{F(A,\ B+1,\ C+1;\ \alpha^2)}{F(A,\ B,\ C;\ \alpha^2)},$$

где

$$A = n/2 + j; \quad B = n/2 + k + j - 1; \quad C = k + j.$$

Остается воспользоваться следующим, указанным Гауссом, разложением:

$$\frac{F(A,\ B+1,\ C+1;\ x)}{F(A,\ B,\ C;\ x)} = \cfrac{1}{1-\cfrac{\alpha_1 x}{1-\cfrac{\beta_1 x}{1-\cfrac{\alpha_2 x}{1-\cfrac{\beta_2 x}{1-\ldots}}}}},$$

где

$$\alpha_1 = \frac{A}{C}\,\frac{C-B}{C+1}, \qquad \beta_1 = \frac{B+1}{C+1}\,\frac{C+1-A}{C+2},$$
$$\alpha_2 = \frac{A+1}{C+2}\,\frac{C+1-B}{C+3}, \quad \beta_2 = \frac{B+2}{C+3}\,\frac{C+2-A}{C+4},$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

причем α_{m+1}, β_{m+1}, получаются из α_m, β_m путем замены A, B и C через $A+1$, $B+1$ и $C+2$.

Для вычисления величин $D^k c_3^{(i)}$, $D^k c_5^{(i)}$, ..., когда величины $D^k c_1^{(i)}$ уже найдены, Иннесом была предложена следующая формула [Иннес, 1909]:

$$n^2 D^k c_{n+2}^{(i)} = D^k\left[D^2 + D - \left(i + \frac{n-1}{2}\right)\left(i + \frac{n-3}{2}\right)\right] c_n^{(i-1)} =$$
$$= D^k\left(D^2 + D - \left(i - \frac{n-1}{2}\right)\left(i - \frac{n-3}{2}\right)\right] c_n^{(i+1)}.$$

При выполнении вычислений целесообразно пользоваться следующими, вытекающими из нее соотношениями (множитель D^k для краткости не пишем):

$$\frac{1}{2} n^2 \left(c_{n+2}^{(i-1)} + c_{n+2}^{(i+1)}\right) = \left(D^2 + D - i^2 - \frac{n^2-1}{4}\right) c_n^{(i)},$$
$$\frac{1}{2} n^2 \left(c_{n+2}^{(i-1)} - c_{n+2}^{(i+1)}\right) = (\qquad\qquad + ni)\, c_n^{(i)}.$$

Каждая из вычисляемых величин находится при этом дважды, что дает очень полезный контроль.

Несколько иной путь для вычисления коэффициентов Лапласа и их производных был указан Андуайе [1923]. Относительно других относящихся сюда работ сведения можно найти у Цейпеля [1912].

§ 11. Случай, когда взаимный наклон орбит велик

Изученная нами в предыдущих параграфах форма разложения пертурбационной функции пригодна лишь в том случае, когда взаимный наклон J орбит рассматриваемых планет достаточно мал (§ 1). Были получены и другие формы разложения в тригонометрические ряды, пригодные при всех значениях J. Вследствие значительно большей сложности, эти формы разложения пока не нашли сколько-нибудь широкого применения. Поэтому мы не будем их подробно рассматривать, а ограничимся лишь немногими указаниями.

Основой разложения пертурбационной функции является всегда разложение величины (§ 3):

$$D_0^{-1} = a'\Delta_0^{-1} = \left(1 + \alpha^2 - 2\alpha\sigma\right)^{-1/2},$$