где

$$\alpha_1 = \frac{A}{C}\,\frac{C-B}{C+1}, \qquad \beta_1 = \frac{B+1}{C+1}\,\frac{C+1-A}{C+2},$$
$$\alpha_2 = \frac{A+1}{C+2}\,\frac{C+1-B}{C+3}, \qquad \beta_2 = \frac{B+2}{C+3}\,\frac{C+2-A}{C+4},$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

причем α_{m+1}, β_{m+1}, получаются из α_m, β_m путем замены A, B и C через $A+1$, $B+1$ и $C+2$.

Для вычисления величин $D^k c_3^{(i)}$, $D^k c_5^{(i)}$, ..., когда величины $D^k c_1^{(i)}$ уже найдены, Иннесом была предложена следующая формула [Иннес, 1909]:

$$n^2 D^k c_{n+2}^{(i)} = D^k\left[D^2 + D - \left(i + \frac{n-1}{2}\right)\left(i + \frac{n-3}{2}\right)\right] c_n^{(i-1)} =$$
$$= D^k\left(D^2 + D - \left(i - \frac{n-1}{2}\right)\left(i - \frac{n-3}{2}\right)\right] c_n^{(i+1)}.$$

При выполнении вычислений целесообразно пользоваться следующими, вытекающими из нее соотношениями (множитель D^k для краткости не пишем):

$$\frac{1}{2} n^2 \left(c_{n+2}^{(i-1)} + c_{n+2}^{(i+1)}\right) = \left(D^2 + D - i^2 - \frac{n^2-1}{4}\right) c_n^{(i)},$$
$$\frac{1}{2} n^2 \left(c_{n+2}^{(i-1)} - c_{n+2}^{(i+1)}\right) = (\qquad\qquad + ni)\, c_n^{(i)}.$$

Каждая из вычисляемых величин находится при этом дважды, что дает очень полезный контроль.

Несколько иной путь для вычисления коэффициентов Лапласа и их производных был указан Андуайе [1923]. Относительно других относящихся сюда работ сведения можно найти у Цейпеля [1912].

§ 11. Случай, когда взаимный наклон орбит велик

Изученная нами в предыдущих параграфах форма разложения пертурбационной функции пригодна лишь в том случае, когда взаимный наклон J орбит рассматриваемых планет достаточно мал (§ 1). Были получены и другие формы разложения в тригонометрические ряды, пригодные при всех значениях J. Вследствие значительно большей сложности, эти формы разложения пока не нашли сколько-нибудь широкого применения. Поэтому мы не будем их подробно рассматривать, а ограничимся лишь немногими указаниями.

Основой разложения пертурбационной функции является всегда разложение величины (§ 3):

$$D_0^{-1} = a'\Delta_0^{-1} = \left(1 + \alpha^2 - 2\alpha\sigma\right)^{-1/2},$$

где

$$\sigma = \cos H = \mu \cos (L' - L) + \nu \cos (L' + L),$$
$$\mu = \cos^2 \frac{J}{2}; \quad \nu = \sin^2 \frac{J}{2}.$$

Делая для краткости

$$x = L' - L; \quad y = L' + L,$$

получим

$$D_0^{-1} = b^{0,0} + 2 \sum_1^\infty b^{i,0} \cos ix + 2 \sum_1^\infty b^{0,j} \cos jy + \\ + 4 \sum_1^\infty \sum_1^\infty b^{i,j} \cos ix \cos jy, \quad (11.1)$$

причем

$$\pi^2 b^{i,j} = \int_0^\pi \int_0^\pi D_0^{-1} \cos ix \cos jy \, dx \, dy.$$

Формула Якоби (§ 7) позволяет придать этому выражению следующую форму:

$$\pi^2 b^{i,j} = \frac{(1/2,\, i+j)}{(1/2,\, i)\,(1/2,\, j)} (\alpha\mu)^i (\alpha\nu)^j \int_0^\pi \int_0^\pi D_0^{-2i-2j-1} \sin^{2i} x \sin^{2j} y \, dx \, dy. \quad (11.2)$$

Отсюда видно, что коэффициенты $b^{i,j}$, получившие название *коэффициентов Якоби*, положительны. Формула (11.2) позволяет легко оценивать величины этих коэффициентов, а также находить их численные значения с любой точностью при помощи механических квадратур.

Изучению аналитической структуры коэффициентов Якоби было посвящено много работ [Тиссеран, 1889; Цейпель, 1912; Пламмер, 1918]. Наибольший практический интерес представляют полученные Сундманом ряды, выражающие величины $D^m b^{i,j}$ через коэффициенты Лапласа и их производные [Сундман, 1901]. Эти ряды сходятся при $0 < \nu < 1$.

Р. А. Лях показал, что разложению (11.1) целесообразно придать другую форму, позволяющую представить пертурбационную функцию в следующем виде:

$$R = \frac{k^2 m'}{a'} \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=-\infty}^{\infty} \bar{b}^{i,j} (\alpha, \nu, \mu) \cos (iL' + jL)$$

или, в более развернутой форме,

$$R = \frac{k^2 m'}{a'} \sum_{n=2}^{\infty} \alpha^n \sum_{k'=0}^{E(n/2)} \sum_{k=0}^{n} a_{k',k}^{(n)} (\nu, \mu) \cos [(n - 2k') L' + (n - 2k) L],$$

где $a_{k',k}^{(n)}(\nu, \mu)$ полиномы от ν и μ степени n. Он нашел эти полиномы для $n \leqslant 5$, а также дал формулы для их дальнейшего вычисления [Лях, 1959].

Разложение совершенно иной структуры было получено Н. Б. Еленевской [1952]. Она показала, что пертурбационная функция может быть разложена в ряд

$$R = \frac{k^2 m'}{a'} \sum_{h=-\infty}^{+\infty} b_1^{(h)}(\alpha) \sum_{i,\,j,\,k} A_{i,\,j,\,k}^{(h)} \cos(iL + jL' + kJ),$$

являющийся тригонометрическим не только по отношению к средним долготам L и L', но и по отношению к взаимному наклону орбит J.

§ 12. Численные методы разложения пертурбационной функции

Методы разложения пертурбационной функции R, рассмотренные в предыдущих параграфах, дают R в форме ряда, каждый член которого есть тригонометрическая функция кратных средних аномалий M и M' с коэффициентом, являющимся явной функцией всех элементов орбит, за исключением больших полуосей. Только для этих последних приходится (по причине сложности коэффициентов Лапласа) употреблять численные значения с самого начала.

Такого рода методы, сохраняющие за элементами их общие, буквенные значения, принято называть *аналитическими*.

Аналитические методы дают наиболее полное решение задачи. В частности, они позволяют очень просто находить производные R по элементам, что необходимо для применения уравнений Лагранжа (§ 8 гл. XVI).

Но аналитические методы, дающие коэффициенты тригонометрических функций в виде рядов, расположенных по степеням e, e', ν, оказываются практически применимыми лишь для очень малых значений этих величин (не бо́льших, примерно, чем 0,15 или 0,20). Это может иметь место и в тех случаях, когда сами коэффициенты тригонометрических рядов убывают достаточно быстро и эти ряды хорошо сходятся. Употребление разложений R в тригонометрические ряды по кратным не средних аномалий, а эксцентрических [Ньюком, 1891], или истинных [Браун и Шук, 1933], не меняет положения дела, так как в конце концов приходится полученные ряды преобразовывать в ряды, расположенные по кратным средних аномалий.

Вследствие этого нередко приходится прибегать к численным методам разложения R, в которых всем элементам сразу