где $a^{(n)}_{k',k}(\nu, \mu)$ полиномы от $\nu$ и $\mu$ степени $n$. Он нашел эти полиномы для $n \leqslant 5$, а также дал формулы для их дальнейшего вычисления [Лях, 1959].

Разложение совершенно иной структуры было получено Н. Б. Еленевской [1952]. Она показала, что пертурбационная функция может быть разложена в ряд

$$R = \frac{k^2 m'}{a'} \sum_{h=-\infty}^{+\infty} b_1^{(h)}(\alpha) \sum_{i, j, k} A^{(h)}_{i, j, k} \cos(iL + jL' + kJ),$$

являющийся тригонометрическим не только по отношению к средним долготам $L$ и $L'$, но и по отношению к взаимному наклону орбит $J$.

## § 12. Численные методы разложения пертурбационной функции

Методы разложения пертурбационной функции $R$, рассмотренные в предыдущих параграфах, дают $R$ в форме ряда, каждый член которого есть тригонометрическая функция кратных средних аномалий $M$ и $M'$ с коэффициентом, являющимся явной функцией всех элементов орбит, за исключением больших полуосей. Только для этих последних приходится (по причине сложности коэффициентов Лапласа) употреблять численные значения с самого начала.

Такого рода методы, сохраняющие за элементами их общие, буквенные значения, принято называть аналитическими.

Аналитические методы дают наиболее полное решение задачи. В частности, они позволяют очень просто находить производные $R$ по элементам, что необходимо для применения уравнений Лагранжа (§ 8 гл. XVI).

Но аналитические методы, дающие коэффициенты тригонометрических функций в виде рядов, расположенных по степеням $e$, $e'$, $\nu$, оказываются практически применимыми лишь для очень малых значений этих величин (не бо́льших, примерно, чем 0,15 или 0,20). Это может иметь место и в тех случаях, когда сами коэффициенты тригонометрических рядов убывают достаточно быстро и эти ряды хорошо сходятся. Употребление разложений $R$ в тригонометрические ряды по кратным не средних аномалий, а эксцентрических [Ньюком, 1891], или истинных [Браун и Шук, 1933], не меняет положения дела, так как в конце концов приходится полученные ряды преобразовывать в ряды, расположенные по кратным средних аномалий.

Вследствие этого нередко приходится прибегать к численным методам разложения $R$, в которых всем элементам сразу даются их численные значения, а коэффициенты тригонометрического ряда находятся по формулам гармонического анализа. Конечно, полученное этим путем разложение не может служить для нахождения производных $R$ по элементам. Поэтому таким разложением нельзя пользоваться для нахождения возмущений элементов по формулам Лагранжа. Но численные методы разложения $R$ вполне пригодны для вычисления возмущенных координат методами, которые будут изложены в следующей главе. Для применения этих методов достаточно иметь разложения $\Delta^{-1}$ и $\Delta^{-3}$, если вычисляются возмущения только первого порядка; если же ищутся и возмущения высших порядков, то нужны еще и разложения $\Delta^{-5}$, $\Delta^{-7}$, .... Но вычислять производные $R$ по элементам здесь не приходится.

Задача заключается в нахождении коэффициентов ряда

$$R=\sum_{i,\,i'}[A_{i,\,i'}\cos(iM+i'M')+B_{i,\,i'}\sin(iM+i'M'). \quad (12.1)$$

Этот ряд можно представить в форме

$$R=a_0+a_1\cos M+a_2\cos 2M+\ldots+b_1\sin M+b_2\sin 2M+\ldots, \quad (12.2)$$

где

$$\left.\begin{aligned} a_i&=a_i(M')=\alpha_0^i+\alpha_1^i\cos M'+\ \ldots\ +\beta_1^i\sin M'+\ \ldots,\\ b_i&=b_i(M')=\gamma_0^i+\gamma_1^i\cos M'+\ \ldots\ +\delta_1^i\sin M'+\ \ldots\end{aligned}\right\} \quad (12.3)$$

Обозначим через $R_{k,\,k'}$ значение функции $R$ для $M=M_k$, $M'=M'_{k'}$, где

$$M_k=k(2\pi/m); \qquad M'_{k'}=k'(2\pi/m'),$$
$$k=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ m-1; \qquad k'=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ m'-1.$$

Обычные формулы гармонического анализа позволяют найти значения коэффициентов ряда (12.1) для рассматриваемых частных значений переменной $M'$:

$$\left.\begin{aligned} a_0(M'_{k'})&=(1/m)\sum_{k=0}^{m-1}R_{k,\,k'},\\ a_i(M'_{k'})&=(2/m)\sum_{k=0}^{m-1}R_{k,\,k'}\cos ki\,(2\pi/m),\\ b_i(M'_{k'})&=(2/m)\sum_{k=0}^{m-1}R_{k,\,k'}\sin ki\,(2\pi/m).\end{aligned}\right\} \quad (12.4)$$

После этого повторное применение тех же формул даст коэффициенты каждого из рядов (12.3).

Например,

$$\alpha_0^i = (1/m') \sum_{k'=0}^{m'-1} a_i(M'_{k'}).$$

Получив числовые значения коэффициентов рядов (12.3) и подставив эти ряды в (12.2), будем иметь разложение пертурбационной функции, легко приводимое к виду (12.1).

Применение формул (12.4) особенно просто, когда для $m$ и $m'$ берутся такие значения как 8, 12, 16, 24, 32 или 48. Для этих случаев имеются удобные вычислительные схемы [Леверрье, 1855; Ганзен, 1857—1861; Браун и Брауэр, 1933].

Впервые изложенный метод разложения пертурбационной функции был применен Эйлером в работе, опубликованной в 1749 г. для вычисления вековых возмущений Юпитера и Сатурна. В 1811 г. Гаусс использовал этот метод для получения возмущений Паллады от Юпитера. Вместо $M$ и $M'$ он взял за переменные, по которым выполняется разложение, $M - M'$ и $M'$. Для первой из этих переменных он разделил окружность на 48 частей, а для второй на 24 части. Такой же выбор переменных был сделан Ганзеном в 1829 г. (вычисления Гаусса были опубликованы лишь в 1906 г.) при изучении взаимных возмущений Юпитера и Сатурна.

Вместо двукратного применения формул (12.4) можно пользоваться для вычисления коэффициентов ряда (12.1) такими формулами:

$$A_{i,i'} = (1/mm') \sum_{k=0}^{m-1} \sum_{k'=0}^{m'-1} R_{k,k'} \cos(iM_k + i'M_{k'}),$$

$$B_{i,i'} = (1/mm') \sum_{k=0}^{m-1} \sum_{k'=0}^{m'-1} R_{k,k'} \sin(iM_k + i'M_{k'}).$$

Заметим, что может оказаться выгодным получнть сначала разложение $R$ по кратным $E$ и $E'$ (или $E - E'$ и $E'$), или по кратным $v$ и $v'$, а затем преобразовать полученный ряд в разложение по средним аномалиям. Такое преобразование для рядов с численными коэффициентами выполняется достаточно просто. Переход от разложений по кратным эксцентрических (или истинных) аномалий к разложениям по кратным средних аномалий выполняется указанным в гл. VI способом.

## § 13. Метод Брауэра

Чтобы получить только что изложенным методом коэффициенты разложений вида (11.1) с большой точностью, может понадобиться вычисление очень большого количества частных значений функции $R$. В только что указанной работе Гаусса