Например,

$$\alpha_0^i = (1/m') \sum_{k'=0}^{m'-1} a_i(M'_{k'}).$$

Получив числовые значения коэффициентов рядов (12.3) и подставив эти ряды в (12.2), будем иметь разложение пертурбационной функции, легко приводимое к виду (12.1).

Применение формул (12.4) особенно просто, когда для m и m' берутся такие значения как 8, 12, 16, 24, 32 или 48. Для этих случаев имеются удобные вычислительные схемы [Леверрье, 1855; Ганзен, 1857—1861; Браун и Брауэр, 1933].

Впервые изложенный метод разложения пертурбационной функции был применен Эйлером в работе, опубликованной в 1749 г. для вычисления вековых возмущений Юпитера и Сатурна. В 1811 г. Гаусс использовал этот метод для получения возмущений Паллады от Юпитера. Вместо M и M' он взял за переменные, по которым выполняется разложение, $M - M'$ и M'. Для первой из этих переменных он разделил окружность на 48 частей, а для второй на 24 части. Такой же выбор переменных был сделан Ганзеном в 1829 г. (вычисления Гаусса были опубликованы лишь в 1906 г.) при изучении взаимных возмущений Юпитера и Сатурна.

Вместо двукратного применения формул (12.4) можно пользоваться для вычисления коэффициентов ряда (12.1) такими формулами:

$$A_{i,\,i'} = (1/mm') \sum_{k=0}^{m-1} \sum_{k'=0}^{m'-1} R_{k,\,k'} \cos(iM_k + i'M_{k'}),$$

$$B_{i,\,i'} = (1/mm') \sum_{k=0}^{m-1} \sum_{k'=0}^{m'-1} R_{k,\,k'} \sin(iM_k + i'M_{k'}).$$

Заметим, что может оказаться выгодным получнть сначала разложение R по кратным E и E' (или $E - E'$ и E'), или по кратным v и v', а затем преобразовать полученный ряд в разложение по средним аномалиям. Такое преобразование для рядов с *численными* коэффициентами выполняется достаточно просто. Переход от разложений по кратным эксцентрических (или истинных) аномалий к разложениям по кратным средних аномалий выполняется указанным в гл. VI способом.

§ 13. Метод Брауэра

Чтобы получить только что изложенным методом коэффициенты разложений вида (11.1) с большой точностью, может понадобиться вычисление очень большого количества частных значений функции R. В только что указанной работе Гаусса пришлось вычислить $48 \times 24 = 1152$ таких значений. Для получения возмущений Марса, производимых Землей, с требующейся в настоящее время точностью пришлось бы вычислить около 8000 частных значений каждой из разлагаемых функций.

Эта работа может быть существенно сокращена, как показал в 1946 г. Брауэр, если воспользоваться тем обстоятельством, что разложение вида (11.1) для квадрата расстояния между планетами, т. е. для Δ^2, сходится очень быстро и легко может быть получено с нужной точностью как численным, так и аналитическим методом. Особенно просто эта величина выражается в том случае, когда разложения производятся по кратным эксцентрических аномалий. В функции этих переменных она выражается не рядом, а тригонометрическим полиномом, состоящим всего из 11 членов.

Метод Брауэра заключается в следующем [Брауэр, 1961]. Обозначим через D точное (в пределах принятого числа знаков) разложение Δ/a', а через δ^{-1}, δ^{-3}, ... приближенные разложения a'/Δ, $(a'/\Delta)^3$, ..., полученные, например, при помощи сравнительно небольшого числа частных значений этих функций. Умножив квадрат δ^{-1} на уже имеющееся у нас точное разложение D^2, мы получим

$$D^2\delta^{-2} = 1 + E,$$

где E тем ближе к нулю, чем точнее принятое нами разложение δ^{-1}.

Последовательное умножение позволяет найти E^2, E^3, ..., после чего формула

$$D^{-1} = \delta^{-1}\left(1 - \frac{1}{2}E + \frac{3}{8}E^2 - \frac{5}{16}E^3 + \frac{35}{128}E^4 - \ldots\right)$$

даст новое, гораздо более точное значение для a'/Δ.

Чтобы получить D^{-3}, находим разложения

$$F = D^2\delta^{-3} - D^{-1},$$

$$D^{-2} = \delta^{-2}(1 - E + E^2 - E^3 + \ldots).$$

Тогда новое, более точное значение $(a'/\Delta)^3$ даст формула

$$D^{-3} = \delta^{-3} - FD^{-2}.$$

Для получения $(a'/\Delta)^5$ можно воспользоваться формулами

$$G = D^2\delta^{-5} - D^{-3}; \quad D^{-5} = \delta^{-5} - GD^{-2},$$

если величина δ^{-5} известна, или же соотношением

$$D^{-5} = D^{-3}D^{-2},$$

если она не вычислялась.