§ 14. Полуаналитические методы разложения

Численные методы, основанные на гармоническом анализе, позволяют получить разложение пертурбационной функции (а также компонент притяжения) с какой угодно точностью при помощи очень простых, удобно выполняемых на машинах вычислений. Но объем вычислительной работы может быть весьма велик. По мере дальнейшего прогресса вычислительной техники, этот недостаток будет делаться все менее и менее чувствительным и численные методы разложения сделаются основным, если не единственным, орудием исследования возмущенного движения тел солнечной системы; по крайней мере в тех случаях, когда требуется получить координаты с большой точностью и для не слишком значительных промежутков времени (не превосходящих, например, тысячи оборотов рассматриваемого объекта). Только при решении некоторых специальных задач (например, при рассмотрении особенно больших промежутков времени) преимущества буквенных разложений пертурбационной функции могут стать решающими.

В XIX столетии, когда возможность существенно сократить объем вычислительной работы имела очень большое значение, были созданы полуаналитические методы разложения пертурбационной функции, занимающие промежуточное положение между аналитическими методами, рассмотренными нами в §§ 3—11, и чисто интерполяционными методами, изложенными в двух предыдущих параграфах.

Вычисление каждого из коэффициентов ряда (12.1) приводится, по существу, к нахождению двойного интеграла. В аналитических методах интегрирование по каждой из переменных выполняется в общем виде, что дает коэффициент в форме бесконечного ряда, расположенного по степеням некоторых параметров. В численных методах оба интегрирования выполняются при помощи тригонометрического интерполирования; аналитические свойства подынтегральной функции при этом не используются. Полуаналитические методы основаны на частичном использовании свойств рассматриваемой функции: интегрирование по одной переменной выполняется аналитически, а по другой — при помощи тригонометрического интерполирования. Таким образом, полуаналитические методы используют ту же идею, которая лежит в основе метода Гаусса для нахождения вековых возмущений (§ 14 гл. XVI).

Первый полуаналитический метод был дан Коши в 1844 г. Коши развил его для изолированного вычисления тех членов в разложении пертурбационной функции, которые производят долгопериодические возмущения. При нахождении этих членов с нужной точностью общими методами неизбежно вычисление всех остальных членов с излишне высокой точностью, что существенно увеличивает вычислительную работу. Этот метод был подробно изложен Тиссераном [1896].

Основные идеи метода Коши были потом использованы для получения полного разложения пертурбационной функции и ее частных производных [Бурже, 1863; Андуайе, 1926].

Другой полуаналитический метод был указан Якоби в 1848 г. Этот метод, дающий разложение пертурбационной функции по кратным эксцентрических аномалий, был впоследствии усовершенствован [Тиссеран, 1896; Пуанкаре, 1907], но практических применений не нашел.

Наибольшее значение имел метод, предложенный Ганзеном в 1857 г. Этот метод был широко использован (в первоначальной форме, приданной ему Ганзеном) для построения аналитических теорий движения малых планет. В следующем параграфе мы изложим его в форме, близкой к той, которую придал ему Хилл, создавая теории движения Юпитера и Сатурна [Хилл, 1890].

§ 15. Метод Ганзена

Разложение пертурбационной функции и ее частных производных приводится к нахождению тригонометрических рядов, представляющих Δ^{-1}, Δ^{-3}, Δ^{-5}, ..., где Δ есть расстояние между рассматриваемыми планетами.

Сохраняя прежние обозначения, имеем

$$\Delta^2 = r^2 + r'^2 - 2rr' \cos H,$$

$$\cos H = \cos(v + \Pi)\cos(v' + \Pi') + \sin(v + \Pi)\sin(v' + \Pi')\cos J.$$

Считая опять $a < a'$ и положив $\alpha = a/a'$, мы можем написать

$$(\Delta/a')^2 = (r'/a')^2 + \alpha^2 (r/a)^2 - 2\alpha (rr'/aa') \cos H. \tag{15.1}$$

С другой стороны, $\cos H$ в развернутом виде равняется

$$C_1 \cos v \cos v' + C_2 \cos v \sin v' + C_3 \sin v \cos v' + C_4 \sin v \sin v',$$

где

$$\begin{aligned}
C_1 &= \cos\Pi\cos\Pi' + \sin\Pi\sin\Pi'\cos J,\\
C_2 &= -\cos\Pi\sin\Pi' + \sin\Pi\cos\Pi'\cos J,\\
C_3 &= -\sin\Pi\cos\Pi' + \cos\Pi\sin\Pi'\cos J,\\
C_4 &= \sin\Pi\sin\Pi' + \cos\Pi\cos\Pi'\cos J.
\end{aligned}$$