всех остальных членов с излишне высокой точностью, что существенно увеличивает вычислительную работу. Этот метод был подробно изложен Тиссераном [1896].

Основные идеи метода Коши были потом использованы для получения полного разложения пертурбационной функции и ее частных производных [Бурже, 1863; Андуайе, 1926].

Другой полуаналитический метод был указан Якоби в 1848 г. Этот метод, дающий разложение пертурбационной функции по кратным эксцентрических аномалий, был впоследствии усовершенствован [Тиссеран, 1896; Пуанкаре, 1907], но практических применений не нашел.

Наибольшее значение имел метод, предложенный Ганзеном в 1857 г. Этот метод был широко использован (в первоначальной форме, приданной ему Ганзеном) для построения аналитических теорий движения малых планет. В следующем параграфе мы изложим его в форме, близкой к той, которую придал ему Хилл, создавая теории движения Юпитера и Сатурна [Хилл, 1890].

§ 15. Метод Ганзена

Разложение пертурбационной функции и ее частных производных приводится к нахождению тригонометрических рядов, представляющих Δ^{-1}, Δ^{-3}, Δ^{-5}, ..., где Δ есть расстояние между рассматриваемыми планетами.

Сохраняя прежние обозначения, имеем

$$\Delta^2 = r^2 + r'^2 - 2rr' \cos H,$$

$$\cos H = \cos(v + \Pi)\cos(v' + \Pi') + \sin(v + \Pi)\sin(v' + \Pi')\cos J.$$

Считая опять $a < a'$ и положив $\alpha = a/a'$, мы можем написать

$$(\Delta/a')^2 = (r'/a')^2 + \alpha^2 (r/a)^2 - 2\alpha (rr'/aa')\cos H. \qquad (15.1)$$

С другой стороны, $\cos H$ в развернутом виде равняется

$$C_1 \cos v \cos v' + C_2 \cos v \sin v' + C_3 \sin v \cos v' + C_4 \sin v \sin v',$$

где

$$\begin{aligned}
C_1 &= \cos\Pi\cos\Pi' + \sin\Pi\sin\Pi'\cos J,\\
C_2 &= -\cos\Pi\sin\Pi' + \sin\Pi\cos\Pi'\cos J,\\
C_3 &= -\sin\Pi\cos\Pi' + \cos\Pi\sin\Pi'\cos J,\\
C_4 &= \sin\Pi\sin\Pi' + \cos\Pi\cos\Pi'\cos J.
\end{aligned}$$

Поэтому, введя вспомогательные величины k, K и k_1, K_1 при помощи соотношений

$$\left.\begin{aligned} k\sin(\Pi'-K) &= \alpha\sin\Pi\cos J,\\ k\cos(\Pi'-K) &= \alpha\cos\Pi,\\ k_1\sin(\Pi'-K_1) &= \alpha\sin\Pi,\\ k_1\cos(\Pi'-K_1) &= \alpha\cos\Pi\cos J, \end{aligned}\right\} \tag{15.2}$$

будем иметь

$$\alpha\cos H = k\cos v\cos(v'+K) + k_1\sin v\sin(v'+K_1).$$

Подставим это выражение в равенство (15.1) и воспользуемся известными формулами

$$\begin{aligned} r &= a(1-e\cos E); & r' &= a'(1-e'\cos E'),\\ r\cos v &= a(\cos E-e); & r'\cos v' &= a'(\cos E'-e'),\\ r\sin v &= a\cos\varphi\sin E; & r'\sin v' &= a'\cos\varphi'\sin E', \end{aligned}$$

выражающими рассматриваемые величины через эксцентрические аномалии. Это даст

$$(\Delta/a')^2 = D - f\cos(E-F) + \frac{1}{2}\gamma_2\cos 2E, \tag{15.3}$$

где

$$\left.\begin{aligned} \gamma_2 &= \alpha^2e^2,\\ D &= D_0 + D_1\cos E' + D_2\sin E' + e'^2\cos^2 E',\\ f\sin F &= G_0 + G_1\cos E' + G_2\sin E',\\ f\cos F &= H_0 + H_1\cos E' + H_2\sin E', \end{aligned}\right\} \tag{15.4}$$

причем постоянные коэффициенты имеют следующие значения:

$$\left.\begin{aligned} &D_0 = 1+\alpha^2+\frac{1}{2}\alpha^2e^2 - 2kee'\cos K,\\ &D_1 = 2(ek\cos K - e'),\\ &D_2 = -2ek\sin K\cos\varphi',\\ &G_0 = -2e'k_1\sin K_1\cos\varphi; \qquad H_0 = 2(e\alpha^2 - e'k\cos K),\\ &G_1 = 2k_1\sin K_1\cos\varphi; \qquad H_1 = 2k\cos K,\\ &G_2 = 2k_1\cos K_1\cos\varphi\cos\varphi'; \qquad H_2 = -2k\sin K\cos\varphi'. \end{aligned}\right\} \tag{15.5}$$

Формулы (15.4) показывают, что D, f и F легко могут быть вычислены для каждого значения E', а следовательно, и M'. Угол F является периодической функцией M' с периодом 2π.

Так как G_0 и H_0 — малые величины порядка эксцентриситетов, то при небольших эксцентриситетах разности $F-E'$, а потому и разности $F-M'$, остаются при всех изменениях M' небольшими по абсолютной величине.

Стоящая сейчас перед нами задача заключается в разложении функций a'/Δ, $(a'/\Delta)^3$, $(a'/\Delta)^5$, ..., в которых значение M' фиксировано, в тригонометрические ряды по кратным E.

Для решения этой задачи мы используем малость третьего члена в выражении (15.3) по сравнению с суммой двух первых. Это может быть сделано двумя различными путями, первый из которых заключается в следующем.

Положив для краткости

$$\mathfrak{D}=[D-f\cos(E-F)]^{1/2}$$

и пользуясь формулой бинома, получим следующие разложения:

$$(a'/\Delta)^n=\mathfrak{D}^{-n}-\frac{1}{4}n\gamma_2\cos 2E\cdot\mathfrak{D}^{-n-2}+\ \ldots, \tag{15.6}$$

где $n=1, 3, 5, \ldots$, сходящиеся тем быстрее, чем меньше γ_2.

Формулы (15.5) показывают, что $|f|<D$, а потому функция $\mathfrak{D}^{-n}$, имеющая непрерывные производные всех порядков, разлагается в абсолютно сходящийся ряд

$$\mathfrak{D}^{-n}=\alpha_n^{(0)}+2\alpha_n^{(1)}\cos(E-F)+2\alpha_n^{(2)}\cos 2(E-F)+\ \ldots \tag{15.7}$$

Так как

$$E-F=E-M'-(F-M'),$$

то этот ряд можно заменить таким:

$$\mathfrak{D}^{-n}=\beta_n^{(0)}+2\beta_n^{(1)}\cos(E-M')+\ldots+2\gamma_n^{(1)}\sin(E-M')+\ldots, \tag{15.8}$$

где

$$\beta_n^{(i)}=\alpha_n^{(i)}\cos i(F-M');\quad \gamma_n^{(i)}=\alpha_n^{(i)}\sin i(F-M'). \tag{15.9}$$

Каждая из этих величин есть функция M', разложимая в тригонометрический ряд. Вычислим эти величины для $M'=2\pi h/k$, где $h=0, 1, 2, \ldots, k-1$, и применим обычные формулы тригонометрического интерполирования (§ 12). Это даст каждый из коэффициентов (15.9) в форме ряда

$$c_0+2\sum_1^\infty c_j\cos jM'+2\sum_1^\infty s_j\sin jM'.$$

Подставим эти ряды в разложения (15.8), а эти последние в формулу (15.6). Полученный результат легко может быть представлен в таком виде:

$$(a'/\Delta)^n = \sum_{i,\, i'} [c^n_{i,\, i'} \cos(iE + i'M') + s^n_{i,\, i'} \sin(iE + i'M')], \tag{15.10}$$

где $i = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots; \; i' = 0, 1, 2, \ldots$

Чтобы выразить входящую сюда эксцентрическую аномалию внутренней планеты через среднюю, нужно воспользоваться формулами (§ 5 гл. VI)

$$\left.\begin{aligned} \cos(iE + \beta) &= \sum_{-\infty}^{+\infty} \frac{i}{k} J_{k-i}(ke) \cos(kM + \beta), \\ \sin(iE + \beta) &= \sum_{-\infty}^{+\infty} \frac{i}{k} J_{k-i}(ke) \sin(kM + \beta), \end{aligned}\right\} \tag{15.11}$$

где β — произвольная величина. В членах, соответствующих значению $k = 0$, коэффициент

$$\frac{i}{k} J_{k-i}(ke)$$

должен быть взят равным $-e/2$, если $i = \pm 1$; при всех остальных значениях i он, очевидно, равен нулю.

Ряды (15.11) при обычно встречающихся значениях эксцентриситета быстро сходятся. После несложных преобразований окончательно будем иметь

$$(a'/\Delta)^n = \sum_{i,\, i'} [C^n_{i,\, i'} \cos(iM + i'M') + S^n_{i,\, i'} \sin(iM + i'M')]. \tag{15.12}$$

Коэффициенты $\alpha^{(i)}_n$ ряда (15.7), на вычислении которых мы не останавливались, легко могут быть выражены через коэффициенты Лапласа. Полагая

$$D = \mathfrak{M}(1 + d^2); \quad f = 2\mathfrak{M}d, \tag{15.13}$$

получим

$$\mathfrak{D}^{-n} = \mathfrak{M}^{-\frac{n}{2}} |1 - 2d\cos(E - F) + d^2|^{-\frac{n}{2}} = \\ = \frac{1}{2} \mathfrak{M}^{-\frac{n}{2}} \sum b^{(i)}_n \cos i(E - F),$$

откуда

$$\alpha^{(i)}_n = \frac{1}{2} \mathfrak{M}^{-\frac{n}{2}} b^{(i)}_n. \tag{15.14}$$

Для вычисления $\mathfrak{M}$ и d можно воспользоваться следующими формулами:

$$\left.\begin{aligned} \sin\psi = f/D; \quad d = \operatorname{tg}(\psi/2), \\ \mathfrak{M} = D\cos^2(\psi/2), \end{aligned}\right\} \tag{15.15}$$

вывод которых не представляет затруднений.