§ 16. Другие формы метода Ганзена

Применение разложения (15.6), на котором основан изложенный в предыдущем параграфе метод, может иногда представлять неудобства, тем более значительные, чем больше величина γ_2, определяемая формулой (15.4). В самом деле, для нахождения $(a'/\Delta)^n$ при $n=1, 3, \ldots, 2h+1$, эта формула требует нахождения $\mathfrak{D}^{-n}$ при $n=1, 3, \ldots, 2h+2k+1$, если приходится учитывать степени γ_2 до k-й включительно.

Вызываемое этим увеличение работы в какой-то мере компенсируется снижением точности, с которой надо находить $\mathfrak{D}^{-n}$ по мере увеличения n. Тем не менее, во многих случаях может оказаться более выгодным другой путь использования малости последнего члена в соотношении (15.3), нежели указанный в предыдущем параграфе.

В основу этого варианта данного им метода разложения пертурбационной функции Ганзен положил разложение правой части равенства (15.3) на два множителя.

Положим

$$(\Delta/a')^2=[C-q\cos(E-Q)]\left[1-\frac{\gamma_2}{q}\cos(E+Q)\right]. \quad (16.1)$$

Отождествляя это выражение с (15.3), получим соотношения

$$\left.\begin{aligned} C&=D-\frac{1}{2}\gamma_2\cos 2Q,\\ qf\sin F&=(q^2-C\gamma_2)\sin Q,\\ qf\cos F&=(q^2+C\gamma_2)\cos Q,\end{aligned}\right\} \quad (16.2)$$

из которых могут быть найдены величины C, q и Q. В самом деле, из них легко получаем

$$f^2\sin(Q+F)\sin(Q-F)=\gamma_2\sin^2 2Q\left(D-\frac{1}{2}\gamma_2\cos 2Q\right), \quad (16.3)$$

$$q\sin 2Q=f\sin(Q+F). \quad (16.4)$$

Вследствие малости γ_2 решение уравнения (16.3) относительно Q выполняется очень просто. После этого формулы (16.2) и (16.4) дадут C и q.

Выражение (16.1) в свою очередь может быть преобразовано к виду

$$(\Delta/a')^2=N[1-2\boldsymbol{a}\cos(E-Q)+\boldsymbol{a}^2][1-2\boldsymbol{b}\cos(E+Q)+\boldsymbol{b}^2]. \quad (16.5)$$

Для этого нужно только сделать подстановку, аналогичную (15.13), а именно:

$$C=\mathfrak{N}(1+\boldsymbol{a}^2); \qquad q=2\mathfrak{N}\boldsymbol{a},$$
$$1=\mathfrak{N}_1(1+\boldsymbol{b}^2); \quad \gamma_2/q=2\mathfrak{N}_1\boldsymbol{b}.$$

Вычисление a, b и N можно выполнить по формулам

$$\sin\psi = q/C; \qquad \sin\psi_1 = \gamma_2/q,$$
$$a = \operatorname{tg}(\psi/2); \qquad b = \operatorname{tg}(\psi_1/2),$$
$$N = \mathfrak{N}\mathfrak{N}_1 = C\cos^2(\psi/2)\cos^2(\psi_1/2).$$

При вычислении величин, относящихся ко второму множителю в (16,5), вследствие малости γ_2 может оказаться полезным применение формул:

$$b = \frac{1}{2}\frac{\gamma_2}{q} + \frac{1}{8}\left(\frac{\gamma_2}{q}\right)^3 + \frac{1}{16}\left(\frac{\gamma_2}{q}\right)^5 + \frac{5}{128}\left(\frac{\gamma_2}{q}\right)^7 + \ldots,$$
$$\mathfrak{N}_1 = \cos^2(\psi_1/2) = 1 - \frac{1}{2}\frac{\gamma_2}{q}b.$$

Что же касается величин, относящихся к первому множителю, то при машинном вычислении алгебраические формулы

$$a = \frac{1}{q}\left(C - \sqrt{C^2 - q^2}\right); \quad \mathfrak{N} = \frac{1}{2}\left(C + \sqrt{C^2 - q^2}\right)$$

могут оказаться более удобными.

Выражение (16.5) показывает, что разложение пертурбационной функции по кратным E (при фиксированном значении M') приводится к нахождению рядов

$$[1 - 2a\cos(E - Q) + a^2]^{-\frac{n}{2}} = \frac{1}{2}\sum_{-\infty}^{+\infty} b_n^{(i)}\cos i(E - Q), \quad (16.6)$$

$$[1 - 2b\cos(E + Q) + b^2]^{-\frac{n}{2}} = \frac{1}{2}\sum_{-\infty}^{+\infty} b_n^{(i)}\cos i(E + Q) \quad (16.7)$$

и их почленному перемножению.

Коэффициенты ряда (16.6) находятся при помощи общих методов (§§ 7, 8 и 10). Что же касается ряда (16.7), в котором обычно приходится принимать во внимание лишь несколько членов, то он может быть удобно получен и при помощи гармонического анализа.

Дальнейшие операции по нахождению рядов (15.10) и (15.12) выполняются так, как это было указано в предыдущем параграфе.

В разработанной им теории движения планет Ганзен принял за независимую переменную эксцентрическую аномалию возмущаемой планеты. Поэтому, после того как получен ряд (15.10), он выражает входящую в него величину M' через E.

Так как

$$M = nt + M_0; \quad M' = n't + M'_0,$$

то

$$M' = \mu M + C,$$

где $\mu = n'/n$, а C не зависит от времени.

Уравнение Кеплера дает

$$M' = \mu E - \mu e \sin E + C.$$

Подстановка этого выражения в (15.10) и использование формул (2.7) гл. VI приводит к разложению

$$(a'/\Delta)^n = \sum_{i,\, i'} \{[i,\, i',\, c]_n \cos(i - i'\mu) E + [i,\, i',\, s]_n \sin(i - i'\mu) E\},$$

которым пользовался Ганзен.