ГЛАВА XVIII

АНАЛИТИЧЕСКИЕ ТЕОРИИ ДВИЖЕНИЯ ПЛАНЕТ

§ 1. Возмущения элементов

Применение метода вариации постоянных интегрирования к эллиптическим элементам дает наиболее полное решение задачи изучения возмущенного движения планеты. Получение оскулирующих элементов в виде явных функций времени позволяет не только вычислять координаты для любого момента, но и дает исчерпывающее представление о свойствах движения.

Дифференциальные уравнения, определяющие оскулирующие элементы, и решение этих уравнений последовательными приближениями были уже нами рассмотрены (§§ 10—13 гл. XVI). Наиболее трудоемкой частью решения является разложение пертурбационной функции в ряд. Если это разложение получено в буквенной форме, то нахождение частных производных пертурбационной функции, фигурирующих в уравнениях Лагранжа, выполняется непосредственно. В такой форме этот метод был использован Леверрье [1855—1877] и Ньюкомом [1867] для построения теорий движения больших планет. Подробное изложение практических приемов, разработанных Леверрье, можно найти в трактате Тиссерана [1889].

В тех случаях, когда нельзя воспользоваться буквенным разложением пертурбационной функции, частные производные этой функции по элементам могут быть найдены следующим образом.

Для каждого элемента, например a, мы имеем

$$\frac{\partial R}{\partial a}=\frac{\partial R}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial a}+\frac{\partial R}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial a}+\frac{\partial R}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial a}. \tag{1.1}$$

Так как

$$R=k^2m'\left(\frac{1}{\Delta}-\frac{xx'+yy'+zz'}{r'^3}\right),$$

то

$$\frac{\partial R}{\partial x}=k^2m'\left(\frac{x'-x}{\Delta^3}-\frac{x'}{r'^3}\right)$$

и аналогично для двух других координат. Это показывает, что получение производных вида (1.1) в форме удобных для интегрирования бесконечных рядов приводится к разложению функции $(a'/\Delta)^3$, которое может быть найдено непосредственно в численной форме (§§ 12—16 гл. XVII). Для нахождения вторых производных R по элементам, необходимых для получения возмущений второго порядка, понадобится еще разложение $(a'/\Delta)^5$ и т. д.

Решение уравнений Лагранжа (§ 8 гл. XVI) методом последовательных приближений мы можем написать в форме

$$\left.\begin{array}{l} a = a_0 + \delta_1 a + \delta_2 a + \ldots, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \varepsilon = \varepsilon_0 + \delta_1\varepsilon + \delta_2\varepsilon + \ldots, \end{array}\right\} \qquad (1.2)$$

где символом δ_n обозначены возмущения n-го порядка относительно возмущающих масс. Через $a_0, \ldots, \varepsilon_0$ обозначены величины оскулирующих элементов в начальный момент времени.

Формулы (1.2) дают, таким образом, изменение оскулирующей орбиты от начального момента $t=0$ до рассматриваемого момента t.

В каждой из формул (1.2) отделим вековую часть возмущений от периодических членов. Это даст выражения вида

$$a = \tilde{a} + P_a;\ \ldots;\ \varepsilon = \tilde{\varepsilon} + P_\varepsilon,$$

где через $\tilde{a}, \ldots, \tilde{\varepsilon}$ обозначены суммы постоянных $a_0, \ldots, \varepsilon_0$ и соответствующих вековых членов, а через $P_a, \ldots, P_\varepsilon$ совокупности периодических и смешанных членов.

Величины $\tilde{a}, \ldots, \tilde{\varepsilon}$ носят название *средних элементов*. Они более пригодны, нежели оскулирующие элементы, например, для характеристики общей конфигурации планетной системы.

§ 2. Среднее движение планеты

Нахождение из наблюдений среднего движения планеты, наблюдения которой охватывают большой промежуток времени, представляет некоторые особенности.

Возмущенная средняя долгота λ дается, как известно, формулой

$$\lambda = \varepsilon + \int_0^t n\,dt.$$

Ограничиваясь, для простоты, возмущениями первого порядка, имеем

$$\varepsilon = \varepsilon_0 + \varkappa t + P_\varepsilon; \quad n = n_0 + P_n,$$