и аналогично для двух других координат. Это показывает, что получение производных вида (1.1) в форме удобных для интегрирования бесконечных рядов приводится к разложению функции $(a'/\Delta)^3$, которое может быть найдено непосредственно в численной форме (§§ 12—16 гл. XVII). Для нахождения вторых производных R по элементам, необходимых для получения возмущений второго порядка, понадобится еще разложение $(a'/\Delta)^5$ и т. д.

Решение уравнений Лагранжа (§ 8 гл. XVI) методом последовательных приближений мы можем написать в форме

$$\left.\begin{array}{l} a = a_0 + \delta_1 a + \delta_2 a + \ldots, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \varepsilon = \varepsilon_0 + \delta_1\varepsilon + \delta_2\varepsilon + \ldots, \end{array}\right\} \tag{1.2}$$

где символом δ_n обозначены возмущения n-го порядка относительно возмущающих масс. Через $a_0, \ldots, \varepsilon_0$ обозначены величины оскулирующих элементов в начальный момент времени.

Формулы (1.2) дают, таким образом, изменение оскулирующей орбиты от начального момента $t=0$ до рассматриваемого момента t.

В каждой из формул (1.2) отделим вековую часть возмущений от периодических членов. Это даст выражения вида

$$a = \tilde{a} + P_a; \ \ldots; \ \varepsilon = \tilde{\varepsilon} + P_\varepsilon,$$

где через $\tilde{a}, \ldots, \tilde{\varepsilon}$ обозначены суммы постоянных $a_0, \ldots, \varepsilon_0$ и соответствующих вековых членов, а через $P_a, \ldots, P_\varepsilon$ совокупности периодических и смешанных членов.

Величины $\tilde{a}, \ldots, \tilde{\varepsilon}$ носят название **средних элементов**. Они более пригодны, нежели оскулирующие элементы, например, для характеристики общей конфигурации планетной системы.

§ 2. Среднее движение планеты

Нахождение из наблюдений среднего движения планеты, наблюдения которой охватывают большой промежуток времени, представляет некоторые особенности.

Возмущенная средняя долгота λ дается, как известно, формулой

$$\lambda = \varepsilon + \int_0^t n\,dt.$$

Ограничиваясь, для простоты, возмущениями первого порядка, имеем

$$\varepsilon = \varepsilon_0 + \varkappa t + P_\varepsilon; \quad n = n_0 + P_n,$$

где P_ε и P_n представляют суммы периодических членов. Поэтому

$$\lambda = \varepsilon_0 + (n_0 + \varkappa) t + P_\lambda. \tag{2.1}$$

Таким образом, если разность средних долгот, соответствующих двум моментам, разделенным значительным интервалом времени, разделить на величину этого интервала, то получим

$$n_1 = n_0 + \varkappa \tag{2.2}$$

с тем большей точностью, чем больше рассматриваемый интервал времени. Таково среднее движение планеты, соответствующее периоду ее сидерического обращения.

Оскулирующие элементы a_0 и n_0 связаны соотношением

$$n_0^2 a_0^3 = k^2 (1 + m). \tag{2.3}$$

Введем в рассмотрение величину a_1, определяемую аналогичным соотношением:

$$n_1^2 a_1^3 = k^2 (1 + m). \tag{2.4}$$

Последние равенства дают

$$a_0^3 = \frac{n_1^2 a_1^3}{(n_1 - \varkappa)^2},$$

откуда, пренебрегая вторыми степенями масс, находим

$$a_0 = a_1 \left(1 + \frac{2}{3} \frac{\varkappa}{n_1}\right). \tag{2.5}$$

При нахождении возмущений, стоящих в формулах (1.2), нужно пользоваться величиной a_0, вычисляемой по формулам (2.4) и (2.5). С другой стороны, если бы мы хотели получить строго возмущения первого порядка $\delta_1 a, \ldots, \delta_1 \varepsilon$, то в правых частях уравнений Лагранжа нужно было бы брать величину n_0, даваемую равенством (2.3). Но уже при нахождении $\delta_2 a, \ldots, \delta_2 \varepsilon$ в правые части уравнений нужно подставлять величину (2.2), т. е. брать среднее движение, равное n_1. На практике предпочитают и при нахождении возмущений первого порядка в аргументах тригонометрических функций вместо n_0 брать n_1. Это позволяет, без увеличения работы, включить в возмущения первого порядка некоторую часть возмущений второго порядка.

В тех случаях, когда n стоит в коэффициентах уравнений Лагранжа (а не в аргументах тригонометрических функций), нужно брать $n = n_0$. В этих случаях n является лишь сокращенным обозначением для величины

$$k \sqrt{1 + m}\, a^{-3/2}.$$

Правая часть формулы (2.1) представляет сумму возмущений от всех планет, заметно влияющих на движение рассматриваемой планеты. Обозначим через m', a', ... массы и большие полуоси внутренних планет по отношению к той, движение которой изучается, а через m'', a'', ... соответствующие величины для внешних планет. Тогда, как легко убедиться,

$$\frac{2\varkappa}{3n_1} = \frac{1}{6}\sum m'\left(b_1^{(0)} + \alpha\frac{db_1^{(0)}}{d\alpha}\right) - \frac{1}{6}\sum m''\alpha^2\frac{db_1^{(0)}}{d\alpha}, \tag{2.6}$$

причем в первой сумме $\alpha = a'/a$, тогда как во второй $\alpha = a/a''$.

Степенные разложения коэффициентов Лапласа (§ 7 гл. XVII) дают

$$b_1^{(0)} + \alpha\frac{db_1^{(0)}}{d\alpha} = 2 + \sum_1^\infty (4n+2)\left(\frac{(2n-1)!!}{2^n\cdot n!}\right)^2\alpha^{2n},$$

$$\alpha^2\frac{db_1^{(0)}}{d\alpha} = \sum_1^\infty 4n\left(\frac{(2n-1)!!}{2^n\cdot n!}\right)^2\alpha^{2n+1}.$$

Применим эти формулы к нахождению оскулирующего значения большой полуоси земной орбиты для момента 1900,0.

В основу таблиц Ньюкома положена следующая величина среднего движения Земли в один юлианский год:

$$n_1 = 1\,295\,977'',4320 - 0'',000403\,T,$$

где через T обозначено время, отсчитываемое от 12^h всемирного времени 0 января 1900 г. и выраженное в юлианских столетиях (по 36 525 суток, содержащих 86 400 секунд всемирного времени).

Формула (2.4) дает, как мы уже видели (§11 гл. III)

$$a_1 = 1{,}000\,000\,030.$$

Отдельные слагаемые величины (2.6), соответствующие тем планетам, которые оказывают здесь заметное влияние, в этом случае таковы:

действие	Венеры	$+1460\times 10^{-9}$
»	Марса	-28
»	Юпитера	-1179
»	Сатурна	-55

$$2\varkappa/3n_1 = +198\times 10^{-9},$$

вследствие чего формула (2.5) дает

$$a_0 = 1{,}000\,000\,23.$$

Эта величина оскулирующей большой полуоси земной орбиты для указанного выше начального момента и была использована Ньюкомом для вычисления таблиц движения Земли.