§ 3. Переход к возмущениям в координатах

После того как получены формулы, представляющие оскулирующие элементы рассматриваемой планеты в виде явных функций времени, вычисление ее координат по формулам невозмущенного движения не представляет трудностей.

При использовании современной вычислительной техники такой путь получения возмущенных координат является наиболее простым.

Другой путь решения задачи заключается в выводе формул, дающих непосредственно возмущенные координаты планеты в виде явных функций времени.

Вывод таких формул не представляет принципиальных трудностей, но с практической точки зрения оправдывает себя лишь в тех случаях, когда можно ограничиться возмущениями первого порядка, а потому число членов в рядах, представляющих оскулирующие элементы, не велико. Леверрье дал ряды, представляющие гелиоцентрические координаты r, l и b для Меркурия, Венеры, Земли и Марса, а также основанные на этих рядах таблицы. Что же касается остальных планет, для которых возмущения второго порядка имеют существенное значение, то он ограничился составлением таблиц, позволяющих находить оскулирующие элементы этих планет [Леверрье, 1855—1877]. Другой пример перехода от возмущений в элементах к возмущениям в координатах представляет данная Ньюкомом теория движения Нептуна [Ньюком, 1867].

Формулы, дающие возмущенные координаты планеты в виде явных функций времени и элементов орбиты, могут служить и для других целей, а не только для вычисления возмущенных координат со всею достижимой точностью. Такого рода формулы были использованы, например, для вычислений, приведших к открытию Нептуна и Плутона.

Гелиоцентрическая долгота l дается равенством

$$l = w + R, \tag{3.1}$$

где w — долгота в орбите, а

$$R = -\frac{1}{\operatorname{arc} 1''} \operatorname{tg}^2 \frac{i}{2} \sin 2u + \frac{1}{2 \operatorname{arc} 1''} \operatorname{tg}^4 \frac{i}{2} \sin 4u - \ldots \tag{3.2}$$

— приведение к эклиптике (§ 9 гл. IV).

Так как

$$u = w - \Omega,$$

то нахождение величины (3.1) приводится к вычислению возмущения долготы в орбите.

В невозмущенном движении

$$w=\lambda+f,$$

где через f обозначено уравнение центра; f разлагается в ряд (§ 6 гл. VI)

$$f=H_1\sin M+H_2\sin 2M+\ \ldots, \tag{3.3}$$

где

$$H_1=2e-\frac{1}{4}e^3+\frac{5}{96}e^5-\ \ldots;\quad H_2=\frac{5}{4}e^2-\frac{11}{24}e^4+\ \ldots,$$

причем

$$M=\lambda-\pi. \tag{3.4}$$

Таким образом, обозначив через $\delta_1\lambda$, $\delta_1\pi$, $\delta_1 e$ возмущения первого порядка соответствующих величин, с той же точностью будем иметь

$$\begin{aligned}\delta_1 f=\delta_1\lambda\,\{H_1\cos M+2H_2\cos 2M+\ \ldots\}-\\ -\delta_1\pi\,\{H_1\cos M+2H_2\cos 2M+\ \ldots\}+\\ +\delta_1 e\left\{\frac{dH_1}{de}\sin M+\frac{dH_2}{de}\sin 2M+\ \ldots\right\}.\end{aligned} \tag{3.5}$$

Вместо возмущения радиуса-вектора обычно находили возмущение его логарифма. Для этого служило следующее легко получаемое (§ 5 гл. VI) выражение

$$\lg r=\lg a+A_0+A_1\cos M+A_2\cos 2M+\ \ldots, \tag{3.6}$$

где A_n — ряд, расположенный по целым положительным степеням e и имеющий множителем e^n.

Дифференцирование этого выражения дает

$$\begin{aligned}\delta_1\lg r=\delta_1\lg a-\delta_1\lambda\,\{A_1\sin M+2A_2\sin 2M+\ \ldots\}+\\ +\delta_1\pi\,\{A_1\sin M+2A_2\sin 2M+\ \ldots\}+\\ +\delta_1 e\left\{\frac{dA_0}{de}+\frac{dA_1}{de}\cos M+\ \ldots\right\}.\end{aligned} \tag{3.7}$$

При помощи формул (3.5) и (3.7) учитывают лишь короткопериодические члены в $\delta_1\lambda$ и периодические члены в $\delta_1\pi$ и $\delta_1 e$. Остальные части этих возмущений учитываются иначе. Делается это следующим образом.

По формулам (3.3) и (3.6), в которых берется значение e, соответствующее начальному моменту, строятся таблицы, дающие f и $\lg r$ по аргументу M.

Приняв тот же начальный момент и то же значение T, как и в предыдущем параграфе, мы имеем, например, для Земли (согласно вычислениям Ньюкома):

$$e=0{,}016\,751\,04-0{,}000\,041\,80\,T-0{,}000\,000\,126\,T^2,$$

что дает для начального момента:

$$f = 6910'',057 \sin M + 72'',338 \sin 2M + 1'',054 \sin 3M + 0'',018 \sin 4M,$$

$$\begin{aligned} \lg r = 0{,}000\,030\,57 - 0{,}007\,274\,12 \cos M &- \\ - 0{,}000\,091\,38 \cos 2M &- \\ - 0{,}000\,001\,45 \cos 3M &- \\ - 0{,}000\,000\,02 \cos 4M&. \end{aligned}$$

При пользовании этими формулами (или соответствующими им таблицами) в аргумент (3.4) уже включают долгопериодические и вековые возмущения λ и π. Остается, таким образом, лишь добавить влияние вековых возмущений эксцентриситета. Только что приведенные формулы показывают, что соответствующие поправки даются следующими выражениями:

$$[f] = (-17'',240T - 0'',052T^2) \sin M - 0'',361T \sin 2M - 0'',001T \sin 3M,$$

$$10^8 [\lg r] = -15T + (1814T + 5T^2) \cos M + 46T \cos 2M + T \cos 3M,$$

которые также удобно табулируются.

Для вычисления возмущенной гелиоцентрической широты $b + \delta_1 b$ служит, прежде всего, формула

$$\sin b = \sin i \sin (\varpi - \Omega), \tag{3.8}$$

где для i берется значение, соответствующее начальному моменту, для ϖ — значение, включающее все возмущения, а для Ω — значение, включающее вековые возмущения.

Обращаясь к вычислению $\delta_1 b$, мы можем считать, что в равенстве (3.8) приращения получают только i и Ω. Это дает

$$\delta_1 b = \sec b \cos i \sin u\, \delta_1 i - \sec b \sin i \cos u\, \delta_1 \Omega.$$

Здесь под $\delta_1 \Omega$ надо разуметь лишь периодические возмущения узла.

Дальнейшие подробности относительно вычисления возмущений координат и различных приемов табулирования полученных выражений содержат указанные выше работы Леверрье и Ньюкома.

Примечание. Если единственной целью является получение возмущений координат, то нахождение их при помощи возмущений элементов является мало целесообразным. Дело в том, что возмущения элементов обычно являются гораздо более значительными, нежели возмущения координат, и эти последние приходится получать как малые разности больших чисел. Причина этого заключается в следующем.

Каждый из шести оскулирующих элементов $e_1, \ldots, e_6$ является функцией координат и их производных в какой-либо момент времени, так что

$$e_k = f_k(r,\ l,\ b,\ \dot r,\ \dot l,\ \dot b,\ t).$$

Таким образом, если возмущения производных $\dot r$, $\dot l$, $\dot b$ велики, то возмущения элементов могут быть также велики, даже если возмущения координат малы.

Между тем, если координата имеет возмущение

$$A \sin(\nu t + C)$$

хотя бы и с очень малой амплитудой A, но с периодом $2\pi/\nu$, весьма коротким по сравнению со временем обращения планеты, то производная этой координаты будет иметь возмущение

$$A\nu \cos(\nu t + C)$$

с тем же периодом, но уже с большей амплитудой.

Нахождение возмущений координат через посредство возмущений элементов может оказаться выгодным лишь в каком-либо исключительном случае еще и по другой причине.

Уже было отмечено, что при создании теории движения планеты наиболее существенную часть всей работы составляет разложение пертурбационной функции в ряд. При этом увеличение степени принимаемых во внимание членов сопровождается весьма быстрым увеличением вычислительной работы.

Но для получения членов степени m в возмущенных координатах нужно найти с такой же точностью возмущения элементов, а это требует нахождения в разложении пертурбационной функции членов степени $m+1$. Между тем, излагаемые ниже прямые методы нахождения возмущений координат показывают, что для получения членов m-й степени в этих возмущениях достаточно иметь в разложении пертурбационной функции лишь члены степени m.

§ 4. Возмущения, производимые близкой к Солнцу планетой

При изучении движения планеты за начало координат принимается центр Солнца. Поэтому приходится учитывать влияние на ее движение не только прямого притяжения каждой из возмущающих планет, но и притяжения, производимого этими планетами на Солнце. Проистекающее отсюда непрямое возмущающее действие выражается (в дифференциальных уравнениях движения) второй частью пертурбационной функции (§ 4 гл. XIV).

Вычисление непрямых возмущений не вызывает новых трудностей. Мы уже видели (§ 3 гл. XVII), что наличие второй части пертурбационной функции может быть легко учтено изменением