момент времени, так что

$$e_k = f_k(r, l, b, \dot{r}, \dot{l}, \dot{b}, t).$$

Таким образом, если возмущения производных $\dot{r}$, $\dot{l}$, $\dot{b}$ велики, то возмущения элементов могут быть также велики, даже если возмущения координат малы.

Между тем, если координата имеет возмущение

$$A \sin(\nu t + C)$$

хотя бы и с очень малой амплитудой A, но с периодом $2\pi/\nu$, весьма коротким по сравнению со временем обращения планеты, то производная этой координаты будет иметь возмущение

$$A\nu \cos(\nu t + C)$$

с тем же периодом, но уже с большей амплитудой.

Нахождение возмущений координат через посредство возмущений элементов может оказаться выгодным лишь в каком-либо исключительном случае еще и по другой причине.

Уже было отмечено, что при создании теории движения планеты наиболее существенную часть всей работы составляет разложение пертурбационной функции в ряд. При этом увеличение степени принимаемых во внимание членов сопровождается весьма быстрым увеличением вычислительной работы.

Но для получения членов степени m в возмущенных координатах нужно найти с такой же точностью возмущения элементов, а это требует нахождения в разложении пертурбационной функции членов степени $m+1$. Между тем, излагаемые ниже прямые методы нахождения возмущений координат показывают, что для получения членов m-й степени в этих возмущениях достаточно иметь в разложении пертурбационной функции лишь члены степени m.

§ 4. Возмущения, производимые близкой к Солнцу планетой

При изучении движения планеты за начало координат принимается центр Солнца. Поэтому приходится учитывать влияние на ее движение не только прямого притяжения каждой из возмущающих планет, но и притяжения, производимого этими планетами на Солнце. Проистекающее отсюда непрямое возмущающее действие выражается (в дифференциальных уравнениях движения) второй частью пертурбационной функции (§ 4 гл. XIV).

Вычисление непрямых возмущений не вызывает новых трудностей. Мы уже видели (§ 3 гл. XVII), что наличие второй части пертурбационной функции может быть легко учтено изменением трех коэффициентов в исходном разложении главной части этой функции. Однако могут быть случаи, когда непрямые возмущения заслуживают особого рассмотрения.

Если минимальное расстояние между двумя планетами меньше или лишь на немного больше, чем радиус-вектор той из этих планет, которая ближе к Солнцу, то прямые возмущения имеют доминирующее значение. Но если одна планета отстоит от Солнца в несколько раз дальше, чем другая, то для нее непрямые возмущения могут существенно превысить прямые.

Обозначим через m, r, x, ..., a, ... величины, относящиеся к планете P, а через m', r', x', ..., a', ... соответствующие величины для планеты P'. Будем считать, что первая из этих планет движется значительно ближе к Солнцу, нежели вторая, так что $a \ll a'$. Массы m, m' и эксцентриситеты e, e' будем считать, как всегда, малыми величинами.

Главная часть пертурбационной функции для планеты P', равная

$$k^2 m\left[(x'-x)^2+(y'-y)^2+(z'-z)^2\right]^{-1/2} \tag{4.1}$$

разлагается в ряд (§ 6 гл. XVII)

$$\sum \frac{Km}{a'}\left(\frac{a}{a'}\right)^h \cos(iM+i'M'+C). \tag{4.2}$$

Для второй части этой функции, т. е. для

$$k^2 m r' r^{-2} \cos H, \tag{4.3}$$

имеем разложение

$$\sum \frac{K_1 m a'}{a^2}\left(\frac{a}{a'}\right)^h \cos(iM+i'M'+C_1). \tag{4.4}$$

В рядах (4.2) и (4.4) суммирование ведется по индексам $h=0, 1, 2, \ldots$; $i, i'=0, \pm 1, \pm 2, \ldots$. Коэффициенты K и K_1, разлагаемые в ряды по степеням e, e', ν, не зависят от размеров орбит.

Так как мы считаем, что величина a очень мала по сравнению с a', то в рядах (4.2) и (4.4) доминируют по абсолютной величине члены, получающиеся при $h=0$, т. е.

$$\sum \frac{Km}{a'} \cos(iM+i'M'+C) \tag{4.5}$$

и

$$\sum \frac{K_1 m a'}{a^2} \cos(iM+i'M'+C_1). \tag{4.6}$$

Подставив в правые части уравнений Лагранжа производные этих доминирующих членов и выполнив интегрирование, мы найдем, что в возмущениях элементов доминировать будут члены вида

$$\sum \frac{Km}{a'(in+i'n')} \cos(iM+i'M'+C) \tag{4.7}$$

— от главной части пертурбационной функции, и

$$\sum \frac{K_1 ma'}{a^2(in+i'n')} \cos(iM+i'M'+C_1) \tag{4.8}$$

— от второй части.

Поскольку

$$n = k(1+m)^{1/2} a^{-3/2}, \tag{4.9}$$

члены ряда (4.7), в которых $i \neq 0$, будут стремиться к нулю вместе с a. Ряд (4.8) не имеет членов, в которых $i=0$ (§ 14 гл. XVI). Поэтому все члены этого ряда будут порядка $a^{-1/2}$ и будут, следовательно, стремиться к бесконечности, когда a стремится к нулю.

Таким образом, возмущения элементов внешней планеты P', зависящие от второй части пертурбационной функции, стремятся к бесконечности, когда размеры орбиты внутренней планеты P неограниченно убывают.

Обратимся теперь к возмущениям координат.

Возмущения прямоугольных гелиоцентрических координат x', y', z' планеты P' даются уравнениями вида

$$\frac{d^2x'}{dt^2} + k^2(1+m')x'r'^{-3} = \frac{\partial R'}{\partial x'}, \tag{4.10}$$

где R' равняется разности выражений (4.1) и (4.3).

Поскольку каждая из производных $\partial R'/\partial x'$, $\partial R'/\partial y'$, ... есть величина того же порядка, как и $\partial R'/\partial a'$, рассмотрим частные производные выражений (4.5) и (4.6) по a'. Частная производная (4.5) после двукратного интегрирования, требуемого уравнениями (4.10), даст величину того же порядка, что и

$$\sum \frac{Km}{a'^2(in+i'n')^2} \cos(iM+i'M'+C). \tag{4.11}$$

Члены (4.6) после таких же операций дадут в возмущениях координат величины порядка

$$\sum \frac{K_1 m}{a^2(in+i'n')^2} \cos(iM+i'M'+C_1). \tag{4.12}$$

В силу соотношения (4.9) все члены ряда (4.11), кроме тех, в которых $i=0$, стремятся к нулю вместе с a. Ряд (4.12), как уже было отмечено, не содержит членов, в которых $i=0$. Поэтому все его члены также будут стремиться к нулю вместе с a.

Итак, возмущения координат внешней планеты P', зависящие от второй части пертурбационной функции, стремятся к нулю при неограниченном убывании большой полуоси орбиты внутренней планеты P.

Легко выяснить природу тех возмущений, которые имеют место в пределе за счет тех членов ряда (4.11), в которых $i=0$. Когда $a \to 0$ и, следовательно, $r \to 0$, то производная выражения (4.1) по x' обращается в $-k^2mx'r'^{-3}$. Подставив эту величину в правые части уравнений (4.10), будем иметь уравнения движения в форме

$$\frac{d^2x'}{dt^2} + k^2(1+m+m')x'r'^{-3} = 0, \ldots$$

Отсюда следует, что возмущения первого порядка внешней планеты при $a \to 0$ в пределе таковы, как если бы масса Солнца была увеличена на массу m внутренней планеты.

Вытекающий отсюда способ учета возмущений, производимых близкими к Солнцу планетами в движении далеких планет или комет, часто оказывается достаточно точным и нередко применяется на практике.

§ 5. Уравнения, дающие вековые возмущения

При изучении движения планет в течение небольших промежутков времени, не превышающих нескольких столетий, можно во многих случаях ограничиться учетом вековых возмущений первого порядка. Эти возмущения всегда легко могут быть получены с любой точностью относительно эксцентриситетов и взаимных наклонов орбит при помощи метода Гаусса (§ 14 гл. XVI),

При более значительных промежутках времени может встретиться надобность в нахождении вековых возмущений высших порядков. Они могут быть найдены при помощи общих методов (§ 10 гл. XVI). Однако сложность вычислений так быстро возрастает при увеличении порядка, что практически возможно лишь вычисление вековых возмущений второго и третьего порядков.

Задача изучения изменений конфигурации планетной системы за очень большие промежутки времени может быть решена (не количественно, а только качественно) путем нахождения членов нулевого ранга, т. е. членов, имеющих множителем возмущающие массы и время в одной и той же степени (§ 11 гл. XVI). Метод, предложенный Лагранжем для представления вековых возмущений в тригонометрической форме, к изложению которого мы сейчас переходим, дает совокупность членов нулевого ранга, хотя и с весьма ограниченной точностью относительно эксцентриситетов и взаимного наклона орбит. Этот метод основан на замене полных уравнений, служащих для нахождения оскулирующих элементов, упрощенными уравнениями,