при неограниченном убывании большой полуоси орбиты внутренней планеты P.

Легко выяснить природу тех возмущений, которые имеют место в пределе за счет тех членов ряда (4.11), в которых $i=0$. Когда $a\to 0$ и, следовательно, $r\to 0$, то производная выражения (4.1) по x' обращается в $-k^2mx'r'^{-3}$. Подставив эту величину в правые части уравнений (4.10), будем иметь уравнения движения в форме

$$\frac{d^2x'}{dt^2}+k^2(1+m+m')x'r'^{-3}=0, \ldots$$

Отсюда следует, что возмущения первого порядка внешней планеты при $a\to 0$ в пределе таковы, как если бы масса Солнца была увеличена на массу m внутренней планеты.

Вытекающий отсюда способ учета возмущений, производимых близкими к Солнцу планетами в движении далеких планет или комет, часто оказывается достаточно точным и нередко применяется на практике.

§ 5. Уравнения, дающие вековые возмущения

При изучении движения планет в течение небольших промежутков времени, не превышающих нескольких столетий, можно во многих случаях ограничиться учетом вековых возмущений первого порядка. Эти возмущения всегда легко могут быть получены с любой точностью относительно эксцентриситетов и взаимных наклонов орбит при помощи метода Гаусса (§ 14 гл. XVI),

При более значительных промежутках времени может встретиться надобность в нахождении вековых возмущений высших порядков. Они могут быть найдены при помощи общих методов (§ 10 гл. XVI). Однако сложность вычислений так быстро возрастает при увеличении порядка, что практически возможно лишь вычисление вековых возмущений второго и третьего порядков.

Задача изучения изменений конфигурации планетной системы за очень большие промежутки времени может быть решена (не количественно, а только качественно) путем нахождения членов нулевого ранга, т. е. членов, имеющих множителем возмущающие массы и время в одной и той же степени (§ 11 гл. XVI). Метод, предложенный Лагранжем для представления вековых возмущений в тригонометрической форме, к изложению которого мы сейчас переходим, дает совокупность членов нулевого ранга, хотя и с весьма ограниченной точностью относительно эксцентриситетов и взаимного наклона орбит. Этот метод основан на замене полных уравнений, служащих для нахождения оскулирующих элементов, упрощенными уравнениями, получающимися путем отбрасывания в правых частях всех периодических членов. Для получения таких усеченных уравнений нужно, очевидно, заменить пертурбационную функцию ее вековой частью.

Обозначим через m_1, m_2, ... массы рассматриваемых планет P_1, P_2, ...; через a_1, e_1, ...; a_2, e_2, ... обозначим их элементы.

Вековые возмущения больших полуосей, появляющиеся только начиная с третьего порядка (§ 13 гл. XVI), крайне малы. Их влиянием на конфигурацию планетной системы, по сравнению с влиянием других элементов, мы можем пренебречь. Поэтому a_1, a_2, ... будем в дальнейшем считать постоянными.

Вековые возмущения элементов ε_1, ε_2, ..., изменяющие лишь положение планет в их орбитах, здесь не представляют интереса. Наибольший интерес представляют, с точки зрения интересующей нас здесь проблемы, вековые возмущения эксцентриситетов и наклонов орбит. Но, как заметил Лагранж, целесообразнее рассматривать вековые возмущения элементов

$$h_\mu = e_\mu \sin \pi_\mu; \qquad k_\mu = e_\mu \cos \pi_\mu, \tag{5.1}$$

и

$$p_\mu = \operatorname{tg} i_\mu \sin \Omega_\mu; \qquad q_\mu = \operatorname{tg} i_\mu \cos \Omega_\mu. \tag{5.2}$$

Вековая часть пертурбационной функции, выражающей действие планеты P_ν на планету P_μ, с точностью до членов второй степени включительно дается выражением (§ 6 гл. XVII)

$$|R_{\mu,\nu}| = k^2 m_\nu \{M_{\mu,\nu} + N_{\mu,\nu}[e_\mu^2 + e_\nu^2 - \operatorname{tg}^2 i_\mu - \operatorname{tg}^2 i_\nu + \\ + 2 \operatorname{tg} i_\mu \operatorname{tg} i_\nu \cos(\Omega_\nu - \Omega_\mu)] - 2P_{\mu,\nu} e_\mu e_\nu \cos(\pi_\nu - \pi_\mu)\}$$

или

$$|R_{\mu,\nu}| = k^2 m_\nu \{M_{\mu,\nu} + N_{\mu,\nu}[h_\mu^2 + h_\nu^2 + k_\mu^2 + k_\nu^2 - \\ - p_\mu^2 - p_\nu^2 - q_\mu^2 - q_\nu^2 + 2(p_\mu p_\nu + q_\mu q_\nu)] - \\ - 2P_{\mu,\nu}(h_\mu h_\nu + k_\mu k_\nu)\}. \tag{5.3}$$

Через $M_{\mu,\nu}$, $N_{\mu,\nu}$, $P_{\mu,\nu}$ здесь обозначены функции a_μ и a_ν, симметричные относительно этих величин.

Возмущения элементов (5.1) и (5.2) даются уравнениями (9.2) и (9.4) гл. XVI. Учитывая точность выражения (5.3), мы можем в правых частях этих уравнений отбросить члены второй и высших степеней. Это даст окончательно следующие уравнения:

$$\frac{dh_\mu}{dt} = \frac{1}{n_\mu a_\mu^2} \frac{\partial R_\mu}{\partial k_\mu}; \qquad \frac{dk_\mu}{dt} = \frac{-1}{n_\mu a_\mu^2} \frac{\partial R_\mu}{\partial h_\mu}, \tag{5.4}$$

и

$$\frac{dp_\mu}{dt} = \frac{1}{n_\mu a_\mu^2} \frac{\partial R_\mu}{\partial q_\mu}; \qquad \frac{dq_\mu}{dt} = \frac{-1}{n_\mu a_\mu^2} \frac{\partial R_\mu}{\partial p_\mu}, \tag{5.5}$$

где

$$R_\mu = \sum_{\nu=1}^{m} [R_{\mu,\nu}], \qquad \mu = 1, 2, \ldots, m. \tag{5.6}$$

Чтобы не исключать значение $\nu = \mu$ при суммировании, условимся считать

$$M_{\mu,\mu} = N_{\mu,\mu} = P_{\mu,\mu} = 0.$$

Введя обозначения

$$(\mu, \nu) = \frac{2k^2 m_\nu}{n_\mu a_\mu^2} N_{\mu,\nu}; \quad [\mu, \nu] = \frac{2k^2 m_\nu}{n_\mu a_\mu^2} P_{\mu,\nu}, \tag{5.7}$$

мы можем уравнения (5.4) написать так:

$$\left.\begin{aligned} \frac{dh_\mu}{dt} - A_{\mu,\mu} k_\mu + [\mu, 1]\, k_1 + [\mu, 2]\, k_2 + \ldots &= 0, \\ \frac{dk_\mu}{dt} + A_{\mu,\mu} h_\mu - [\mu, 1]\, h_1 - [\mu, 2]\, h_2 - \ldots &= 0, \end{aligned}\right\} \tag{5.8}$$

где

$$A_{\mu,\mu} = (\mu, 1) + (\mu, 2) + \ldots \tag{5.9}$$

Уравнения (5.5) примут вид

$$\left.\begin{aligned} \frac{dp_\mu}{dt} + A_{\mu,\mu} q_\mu - (\mu, 1)\, q_1 - (\mu, 2)\, q_2 - \ldots &= 0, \\ \frac{dq_\mu}{dt} - A_{\mu,\mu} p_\mu + (\mu, 1)\, p_1 + (\mu, 2)\, p_2 + \ldots &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{5.10}$$

Отмеченная выше симметричность коэффициентов $N_{\mu,\nu}$ и $P_{\mu,\nu}$ относительно a_μ и a_ν показывает, что

$$\left.\begin{aligned} m_\mu n_\mu a_\mu^2 (\mu, \nu) &= m_\nu n_\nu a_\nu^2 (\nu, \mu), \\ m_\mu n_\mu a_\mu^2 [\mu, \nu] &= m_\nu n_\nu a_\nu^2 [\nu, \mu]. \end{aligned}\right\} \tag{5.11}$$

Поэтому, умножив уравнения (5.8) соответственно на $m_\mu n_\mu a_\mu^2 h_\mu$ и $m_\mu n_\mu a_\mu^2 k_\mu$, сложив их почленно и просуммировав полученное равенство по μ, получим

$$\sum m_\mu n_\mu a_\mu^2 \left(h_\mu \frac{dh_\mu}{dt} + k_\mu \frac{dk_\mu}{dt} \right) = 0.$$

Следовательно,

$$\sum m_\mu n_\mu a_\mu^2 (h_\mu^2 + k_\mu^2) = C, \tag{5.12}$$

где C — постоянная величина.

Таким образом, учитывая (5.1), имеем

$$\sum m_\mu n_\mu a_\mu^2 e_\mu^2 = C. \tag{5.13}$$

Для уравнений (5.5) найдем аналогичное соотношение

$$\sum m_\mu n_\mu a_\mu^2 \operatorname{tg}^2 i_\mu = C'. \tag{5.14}$$

Эти первые интегралы усеченных уравнений движения были открыты Лапласом.

В настоящее время эксцентриситеты и наклоны планетных орбит не велики, вследствие чего и постоянные C и C' очень малы. Так как все планеты движутся в одну сторону, то все члены в каждой из сумм, стоящих в (5.13) и (5.14), положительны. Лаплас считал возможным заключить отсюда, что и в будущем e_μ и i_μ останутся малыми величинами, что обеспечивает «устойчивость» планетной системы. Однако такое заключение справедливо лишь в отношении тех планет, массы которых составляют существенную часть суммы всех планетных масс. Если же масса какой-либо планеты достаточно мала, то ее эксцентриситет и наклон орбиты могут стать очень большими, не нарушая соотношений (5.13) и (5.14).

Так как

$$n_\mu = k\sqrt{1+m_\mu}\, a_\mu^{-3/2},$$

то, пренебрегая величинами второго порядка относительно масс, интегралам Лапласа можно придать такой вид:

$$\sum m_\mu \sqrt{a_\mu}\, e_\mu^2 = \text{const}; \quad \sum m_\mu \sqrt{a_\mu} \operatorname{tg}^2 i_\mu = \text{const}.$$

§ 6. Тригонометрическая форма вековых возмущений

Уравнения (5.8) и (5.10), дающие вековые возмущения лагранжевых элементов, могут быть легко решены.

Сообразно с общим способом решения линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами нужно, прежде всего, найти $2m$ независимых частных решений каждой из этих двух систем.

Для системы уравнений (5.8) частные решения будем искать в форме

$$\left.\begin{aligned} h_\mu &= \frac{L^{(\mu)}}{a_\mu\sqrt{m_\mu n_\mu}} \sin(gt+\beta_\mu); \\ k_\mu &= \frac{L^{(\mu)}}{a_\mu\sqrt{m_\mu n_\mu}} \cos(gt+\beta_\mu) \\ &(\mu = 1, 2, \ldots, m), \end{aligned}\right\} \tag{6.1}$$

где g, β_μ и $L^{(\mu)}$ — постоянные величины.