Таким образом, учитывая (5.1), имеем

$$\sum m_\mu n_\mu a_\mu^2 e_\mu^2 = C. \tag{5.13}$$

Для уравнений (5.5) найдем аналогичное соотношение

$$\sum m_\mu n_\mu a_\mu^2 \operatorname{tg}^2 i_\mu = C'. \tag{5.14}$$

Эти первые интегралы усеченных уравнений движения были открыты Лапласом.

В настоящее время эксцентриситеты и наклоны планетных орбит не велики, вследствие чего и постоянные C и C' очень малы. Так как все планеты движутся в одну сторону, то все члены в каждой из сумм, стоящих в (5.13) и (5.14), положительны. Лаплас считал возможным заключить отсюда, что и в будущем e_μ и i_μ останутся малыми величинами, что обеспечивает «устойчивость» планетной системы. Однако такое заключение справедливо лишь в отношении тех планет, массы которых составляют существенную часть суммы всех планетных масс. Если же масса какой-либо планеты достаточно мала, то ее эксцентриситет и наклон орбиты могут стать очень большими, не нарушая соотношений (5.13) и (5.14).

Так как

$$n_\mu = k\sqrt{1+m_\mu}\, a_\mu^{-3/2},$$

то, пренебрегая величинами второго порядка относительно масс, интегралам Лапласа можно придать такой вид:

$$\sum m_\mu \sqrt{a_\mu}\, e_\mu^2 = \text{const}; \quad \sum m_\mu \sqrt{a_\mu} \operatorname{tg}^2 i_\mu = \text{const}.$$

§ 6. Тригонометрическая форма вековых возмущений

Уравнения (5.8) и (5.10), дающие вековые возмущения лагранжевых элементов, могут быть легко решены.

Сообразно с общим способом решения линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами нужно, прежде всего, найти $2m$ независимых частных решений каждой из этих двух систем.

Для системы уравнений (5.8) частные решения будем искать в форме

$$\left.\begin{aligned} h_\mu &= \frac{L^{(\mu)}}{a_\mu\sqrt{m_\mu n_\mu}} \sin(gt+\beta_\mu); \\ k_\mu &= \frac{L^{(\mu)}}{a_\mu\sqrt{m_\mu n_\mu}} \cos(gt+\beta_\mu) \\ &(\mu = 1,\ 2,\ \ldots,\ m), \end{aligned}\right\} \tag{6.1}$$

где g, β_μ и $L^{(\mu)}$ — постоянные величины.

Подстановка этих выражений в уравнения (5.8) показывает, что g и $L^{(\mu)}$ должны удовлетворять уравнениям:

$$\left.\begin{array}{l}(A_{1,1}-g)L^{(1)}+A_{1,2}L^{(2)}+\ldots+A_{1,m}L^{(m)}=0,\\ A_{2,1}L^{(1)}+(A_{2,2}-g)L^{(2)}+\ldots+A_{2,m}L^{(m)}=0,\\ \cdot\\ A_{m,1}L^{(1)}+A_{m,2}L^{(2)}+\ldots+(A_{m,m}-g)L^{(m)}=0,\end{array}\right\}\tag{6.2}$$

тогда как β_μ остаются произвольными.

В уравнениях (6.2) для краткости положено

$$A_{\mu,\nu}=-\frac{a_\mu\sqrt{m_\mu n_\mu}}{a_\nu\sqrt{m_\nu n_\nu}}[\mu,\ \nu],\tag{6.3}$$

если $\mu\neq\nu$, тогда как $A_{\mu,\mu}$ определяются равенством (5.9). Соотношения (5.11) показывают, что

$$A_{\mu,\nu}=A_{\nu,\mu}.$$

Поэтому определитель системы (6.2)

$$D(g)=\begin{vmatrix}A_{1,1}-g & A_{1,2} & \ldots & A_{1,m}\\ A_{2,1} & A_{2,2}-g & \ldots & A_{2,m}\\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot\\ A_{m,1} & A_{m,2} & \ldots & A_{m,m}-g\end{vmatrix}\tag{6.4}$$

симметричен относительно главной диагонали.

Обозначим через $g_1, g_2, \ldots, g_m$ корни уравнения

$$D(g)=0,\tag{6.5}$$

а через $L_\lambda^{(\mu)}$ — значения коэффициентов $L^{(\mu)}$, получаемые из уравнений (6.2) при $g=g_\lambda$. Один из этих коэффициентов остается произвольным. Поэтому мы можем положить

$$L_\lambda^{(\mu)}=C_\lambda q_\lambda^{(\mu)},$$

где $C_1, C_2, \ldots, C_m$ — произвольные постоянные, а $q_\lambda^{(\mu)}$ — вполне определенные числа.

Общее решение системы (5.8) мы можем написать в случае, когда между корнями уравнения (6.5) нет равных, следующим образом:

$$\left.\begin{array}{l}h_\mu=\sum\limits_1^m M_\lambda^{(\mu)}\sin(g_\lambda t+\beta_\lambda),\\ k_\mu=\sum\limits_1^m M_\lambda^{(\mu)}\cos(g_\lambda t+\beta_\lambda),\end{array}\right\}\tag{6.6}$$

где

$$M_\lambda^{(\mu)} = \frac{C_\lambda q_\lambda^{(\mu)}}{a_\mu \sqrt{m_\mu n_\mu}}.$$

Уравнение (6.5), левая часть которого дается выражением вида (6.4), получило название векового уравнения.

От характера корней векового уравнения, являющегося характеристическим уравнением системы (5.8), зависят свойства решения (6.6).

В интересующем нас случае, когда все m_μ и n_μ положительны, вековое уравнение с элементами, определяемыми равенствами (5.9) и (6.3), не может иметь комплексных корней. В самом деле, при их наличии выражения (6.6) содержали бы показательные функции, вследствие чего левая часть равенства (5.12) стремилась бы к бесконечности при $t \to +\infty$ или $t \to -\infty$, что невозможно.

Лаплас пытался доказать таким же способом отсутствие равных корней, но при этом впал в ошибку: он считал, что при наличии равных корней в общем интеграле (6.6) обязательно должны появиться в качестве множителей тригонометрических функций полиномы относительно t, что было бы несовместимо с интегралом (5.12). Однако, как было показано Вейерштрассом (1858) и О. И. Сомовым (1859), в случае равных корней характеристического уравнения вовсе не обязательно появление t вне знаков тригонометрических функций.

Когда рассматриваются только две планеты, невозможность равных корней у векового уравнения легко доказывается непосредственной проверкой. Для случая трех планет эта невозможность была в 1878 г. доказана Зеелигером.

Общее решение уравнений (5.10), имеющих ту же форму, что и уравнения (5.8), даются выражениями

$$\left.\begin{aligned} p_\mu &= \sum_1^m N_\lambda^{(\mu)} \sin(f_\lambda t + \gamma_\lambda), \\ q_\mu &= \sum_1^m N_\lambda^{(\mu)} \cos(f_\lambda t + \gamma_\lambda), \end{aligned}\right\} \tag{6.7}$$

аналогичными (6.6), где γ_λ — произвольные постоянные. Через $f_1, f_2, \ldots, f_m$ обозначены корни векового уравнения

$$\overline{D}(f) = 0. \tag{6.8}$$

Здесь $\overline{D}(f)$ отличается от (6.4) только тем, что на этот раз

$$A_{\mu,\nu} = -\frac{a_\mu \sqrt{m_\mu n_\mu}}{a_\nu \sqrt{m_\nu n_\nu}} (\mu, \nu), \tag{6.9}$$

для всех $\mu \neq \nu$, а $A_{\mu,\mu}$ имеют по-прежнему значения (5.9).

Выражения (6.6) показывают, что

$$e_\mu^2 = h_\mu^2 + k_\mu^2 = M_1^{(\mu)^2} + M_2^{(\mu)^2} + \ldots$$
$$\ldots + 2M_1^{(\mu)}M_2^{(\mu)}\cos[(g_1 - g_2)t + \beta_1 - \beta_2] +$$
$$+ 2M_1^{(\mu)}M_3^{(\mu)}\cos[(g_1 - g_3)t + \beta_1 - \beta_3] +$$
$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots$$

Отсюда ясно, что

$$e_\mu < |M_1^{(\mu)}| + |M_2^{(\mu)}| + \ldots \qquad (6.10)$$

Точно так же из выражений (6.7) получим

$$\operatorname{tg} i_\mu < |N_1^{(\mu)}| + |N_2^{(\mu)}| + \ldots \qquad (6.11)$$

Эти соотношения позволяют найти верхние границы эксцентриситетов и наклонов орбит.

Рассмотрим теперь частный случай, когда в выражениях (6.6) абсолютная величина одного из коэффициентов превосходит сумму абсолютных величин всех остальных. Пусть, например,

$$|M_\rho^{(\mu)}| > \sum_1^m{}' |M_\lambda^{(\mu)}|, \qquad (6.12)$$

где значок $'$ в правой части показывает, что при суммировании значение $\lambda = \rho$ должно быть пропущено. Очевидная комбинация равенств (6.6) дает

$$e_\mu \sin(\pi_\mu - g_\rho t - \beta_\rho) = + \sum{}' M_\lambda^{(\mu)} \sin[(g_\lambda - g_\rho)t + \beta_\lambda - \beta_\rho],$$
$$e_\mu \cos(\pi_\mu - g_\rho t - \beta_\rho) = M_\rho^{(\mu)} + \sum{}' M_\lambda^{(\mu)} \cos[(g_\lambda - g_\rho)t + \beta_\lambda - \beta_\rho].$$

Правая часть второго из этих равенств в силу условия (6.12) никогда не может обратиться в нуль. Мы можем поэтому положить

$$\pi_\mu = g_\rho t + \beta_\rho + k \cdot 180^\circ + \delta_\mu(t),$$

где k — целое число, а последний член удовлетворяет неравенству

$$-90^\circ < \delta_\mu(t) < +90^\circ.$$

Отсюда следует, что при условии (6.12) перигелий планеты P_μ будет иметь среднее движение, равное g_ρ. Иначе говоря, перигелий будет всегда отстоять меньше чем на 90° от точки, движущейся равномерно с угловой скоростью g_ρ.

В рассматриваемом случае

$$e_\mu > |M_\rho^{(\mu)}| - \sum_\lambda{}' |M_\lambda^{(\mu)}|,$$

а потому e_μ имеет нижнюю границу, отличную от нуля.

Аналогичные заключения имеют место и для вековых возмущений узлов и наклонов орбит, даваемых формулами (6.7).

Важно отметить, что каждая из величин $A_{\mu,\nu}$, определяемых формулами (5.9), (6.3) и (6.9), порядка планетных масс. Отсюда следует, что корни уравнений (6.5) и (6.8) также порядка масс. Поэтому разложение выражений (6.6) и (6.7) по степеням $g_\mu t$ и $f_\mu t$ даст возмущения нулевого ранга.

§ 7. Вековые возмущения больших планет

Получив выражения (6.6) и (6.7) для вековых возмущений (в мемуаре, опубликованном в 1782 г.), Лагранж вычислил входящие в эти выражения величины для случая нашей солнечной системы. Конечно, это первое вычисление представляет только исторический интерес. Действие Урана (открытого в 1781 г.) здесь еще не учитывается, а для масс Меркурия, Венеры и Марса Лагранжу пришлось взять грубо приближенные значения, полученные путем умножения объема на гипотетическую плотность.

С лучшими значениями постоянных и с учетом влияния Урана вычисления были выполнены Леверрье в 1839 г. Позднее, после получения достаточно надежных данных для Нептуна (открытого в 1846 г.), эти вычисления были им дополнены [Леверрье, 1857]. До недавнего времени наибольшую роль играли значения вековых возмущений (6.6) и (6.7), опубликованные Стокуэллом в 1870 г. В 1895 г. появилась фундаментальная работа Харцера, давшая много нового в отношении разработки метода, но ее результаты были искажены допущенной автором ошибкой. Наибольшее значение имеют сейчас результаты Брауэра и Вуркома [1950], применивших тот же метод, что и Харцер (вычисление вековых возмущений канонических элементов) к современным данным относительно масс и орбит восьми основных планет солнечной системы. Но включить действие Плутона оказалось невозможным вследствие особенностей его орбиты. Как известно, радиус-вектор Плутона может иногда быть меньше радиуса-вектора Нептуна. Вследствие этого орбита Плутона при варьировании долготы перигелия и долготы узла от 0° до 360° может пересекаться с орбитой Нептуна. Таким образом, разложение пертурбационной функции, на котором основан изложенный в §§ 5 и 6 метод Лагранжа, становится неприменимым.

В таблице 4 приведены наибольшие и наименьшие значения эксцентриситетов планетных орбит, полученные указанным в предыдущем параграфе способом из выражений вековых возмущений, данных в двух последних из только что указанных работ.

В тех случаях, когда в выражениях (6.6) нет доминирующего коэффициента, остается не ясным, имеет ли эксцентриситет