Аналогичные заключения имеют место и для вековых возмущений узлов и наклонов орбит, даваемых формулами (6.7).

Важно отметить, что каждая из величин $A_{\mu,\nu}$, определяемых формулами (5.9), (6.3) и (6.9), порядка планетных масс. Отсюда следует, что корни уравнений (6.5) и (6.8) также порядка масс. Поэтому разложение выражений (6.6) и (6.7) по степеням $g_{\mu}t$ и $f_{\mu}t$ даст возмущения нулевого ранга.

§ 7. Вековые возмущения больших планет

Получив выражения (6.6) и (6.7) для вековых возмущений (в мемуаре, опубликованном в 1782 г.), Лагранж вычислил входящие в эти выражения величины для случая нашей солнечной системы. Конечно, это первое вычисление представляет только исторический интерес. Действие Урана (открытого в 1781 г.) здесь еще не учитывается, а для масс Меркурия, Венеры и Марса Лагранжу пришлось взять грубо приближенные значения, полученные путем умножения объема на гипотетическую плотность.

С лучшими значениями постоянных и с учетом влияния Урана вычисления были выполнены Леверрье в 1839 г. Позднее, после получения достаточно надежных данных для Нептуна (открытого в 1846 г.), эти вычисления были им дополнены [Леверрье, 1857]. До недавнего времени наибольшую роль играли значения вековых возмущений (6.6) и (6.7), опубликованные Стокуэллом в 1870 г. В 1895 г. появилась фундаментальная работа Харцера, давшая много нового в отношении разработки метода, но ее результаты были искажены допущенной автором ошибкой. Наибольшее значение имеют сейчас результаты Брауэра и Вуркома [1950], применивших тот же метод, что и Харцер (вычисление вековых возмущений канонических элементов) к современным данным относительно масс и орбит восьми основных планет солнечной системы. Но включить действие Плутона оказалось невозможным вследствие особенностей его орбиты. Как известно, радиус-вектор Плутона может иногда быть меньше радиуса-вектора Нептуна. Вследствие этого орбита Плутона при варьировании долготы перигелия и долготы узла от 0° до 360° может пересекаться с орбитой Нептуна. Таким образом, разложение пертурбационной функции, на котором основан изложенный в §§ 5 и 6 метод Лагранжа, становится неприменимым.

В таблице 4 приведены наибольшие и наименьшие значения эксцентриситетов планетных орбит, полученные указанным в предыдущем параграфе способом из выражений вековых возмущений, данных в двух последних из только что указанных работ.

В тех случаях, когда в выражениях (6.6) нет доминирующего коэффициента, остается не ясным, имеет ли эксцентриситет нижнюю границу, отличную от нуля. Наоборот, если условие (6.12) выполняется и нижняя граница эксцентриситета, отличная от нуля, существует, то перигелий планеты имеет, в среднем, поступательное движение. Это, однако, не значит, что движение перигелия (даже представляемое формулами (6.6), т. е. без учета периодических членов пертурбационной функции) происходит всегда в одну сторону.

Таблица 4

Планета	Стокуэлл		Брауэр и Вурком		
	Пределы эксцентриситета		Пределы эксцентриситета		Период обращения перигелия (в тысячелетиях)
Меркурий . . .	0,121	0,232	0,109	0,241	220
Венера	...	0,071	...	0,074	...
Земля	...	0,068	...	0,067	...
Марс	0,018	0,140	0,004	0,141	72
Юпитер	0,025	0,061	0,027	0,062	300
Сатурн	0,012	0,084	0,012	0,086	47
Уран	0,012	0,078	...	0,067	...
Нептун	0,006	0,015	0,005	0,013	2000

Таблица 5

Планета	Стокуэлл		Брауэр и Вурком		
	Пределы наклона		Пределы наклона		Период обращения узла (в тысячелетиях)
Меркурий . . .	4°,7	9°,2	4°,5	9°,8	250
Венера	...	3,3	...	3,4	...
Земля	...	3,1	...	2,9	...
Марс	...	5,9	...	6,2	...
Юпитер	0,2	0,5	0,2	0,5	50
Сатурн	0,8	1,0	0,8	1,0	50
Уран	0,9	1,1	0,9	1,1	450
Нептун	0,6	0,8	0,6	0,8	1900

Аналогичные данные в отношении наклонов орбит и движения узла содержит таблица 5. Наклоны орбит считаются относительно плоскости Лапласа (§ 3 гл. XIV).

Различие между результатами двух указанных работ почти целиком зависит от различия принятых в этих работах значений масс планет.

Выражения вековых возмущений в форме (6.6) и (6.7) несколько расширяют наши сведения относительно устойчивости солнечной системы. Учитывая все предположения, на которых основан вывод этих формул, можно думать, что они, совместно с теоремами об отсутствии вековых возмущений первого и второго порядков у больших полуосей орбит, позволяют утверждать неизменность конфигурации солнечной системы в течение нескольких миллионов лет.

Примечание. Решение векового уравнения (6.5) и вычисление соответствующих коэффициентов $L_\lambda^{(\mu)}$ представляет, при большом значении m, довольно трудоемкую операцию. Для ее выполнения Леверрье и Якоби создали специальные методы, опубликованные ими соответственно в 1839 и 1845 годах. Эти методы употребляются еще и теперь. Следующий по времени метод, имеющий много преимуществ, был предложен А. Н. Крыловым в 1931 г.

Эта задача, т. е. нахождение собственных значений квадратной симметричной матрицы $\|A_{\mu,\nu}\|$ и ее собственных векторов, подробно рассматривается в статье Вейленда [1947] и в книге Д. К. Фаддеева и В. Н. Фаддеевой [1960], содержащих весьма полную библиографию.

§ 8. Вековые возмущения малых планет

Применим изложенный метод нахождения вековых возмущений к случаю, когда рассматривается система, состоящая из $m+1$ планет P_0, P_1, P_2, ..., P_m, причем масса m_0 планеты P_0 исчезающе мала.

В этом случае система уравнений, дающих вековые возмущения лагранжевых элементов (5.1), распадается, очевидно, на две независимые системы: систему (5.8), дающую вековые возмущения планет P_1, P_2, ..., P_m, имеющих конечные массы, и систему

$$\left.\begin{aligned} dh_0/dt &= +k_0\sum_1^m (0,\ \mu) - \sum_1^m k_\mu [0,\ \mu], \\ dk_0/dt &= -h_0\sum_1^m (0,\ \mu) + \sum_1^m h_\mu [0,\ \mu], \end{aligned}\right\} \tag{8.1}$$

дающую вековые возмущения изучаемой малой планеты.

Решив систему (5.8) и подставив полученные значения h_1, ..., h_m, k_1, ..., k_m в уравнения (8.1), будем иметь систему двух неоднородных, линейных уравнений вида

$$\left.\begin{aligned} dh_0/dt &= +gk_0 - \sum_1^m B_\mu \cos(g_\mu t + \beta_\mu), \\ dk_0/dt &= -gh_0 + \sum_1^m B_\mu \sin(g_\mu t + \beta_\mu), \end{aligned}\right\} \tag{8.2}$$

где

$$g = \sum_1^m (0,\ \mu), \tag{8.3}$$

а через B_μ обозначены постоянные коэффициенты.