основан вывод этих формул, можно думать, что они, совместно с теоремами об отсутствии вековых возмущений первого и второго порядков у больших полуосей орбит, позволяют утверждать неизменность конфигурации солнечной системы в течение нескольких миллионов лет.

Примечание. Решение векового уравнения (6.5) и вычисление соответствующих коэффициентов $L_\lambda^{(\mu)}$ представляет, при большом значении m, довольно трудоемкую операцию. Для ее выполнения Леверрье и Якоби создали специальные методы, опубликованные ими соответственно в 1839 и 1845 годах. Эти методы употребляются еще и теперь. Следующий по времени метод, имеющий много преимуществ, был предложен А. Н. Крыловым в 1931 г.

Эта задача, т. е. нахождение собственных значений квадратной симметричной матрицы $\|A_{\mu,\nu}\|$ и ее собственных векторов, подробно рассматривается в статье Вейленда [1947] и в книге Д. К. Фаддеева и В. Н. Фаддеевой [1960], содержащих весьма полную библиографию.

§ 8. Вековые возмущения малых планет

Применим изложенный метод нахождения вековых возмущений к случаю, когда рассматривается система, состоящая из $m+1$ планет P_0, P_1, P_2, ..., P_m, причем масса m_0 планеты P_0 исчезающе мала.

В этом случае система уравнений, дающих вековые возмущения лагранжевых элементов (5.1), распадается, очевидно, на две независимые системы: систему (5.8), дающую вековые возмущения планет P_1, P_2, ..., P_m, имеющих конечные массы, и систему

$$\left.\begin{aligned} dh_0/dt &= +k_0\sum_1^m (0,\ \mu) - \sum_1^m k_\mu [0,\ \mu], \\ dk_0/dt &= -h_0\sum_1^m (0,\ \mu) + \sum_1^m h_\mu [0,\ \mu], \end{aligned}\right\} \tag{8.1}$$

дающую вековые возмущения изучаемой малой планеты.

Решив систему (5.8) и подставив полученные значения h_1, ..., h_m, k_1, ..., k_m в уравнения (8.1), будем иметь систему двух неоднородных, линейных уравнений вида

$$\left.\begin{aligned} dh_0/dt &= +gk_0 - \sum_1^m B_\mu \cos(g_\mu t + \beta_\mu), \\ dk_0/dt &= -gh_0 + \sum_1^m B_\mu \sin(g_\mu t + \beta_\mu), \end{aligned}\right\} \tag{8.2}$$

где

$$g = \sum_1^m (0,\ \mu), \tag{8.3}$$

а через B_μ обозначены постоянные коэффициенты.

Решение этих уравнений в общем случае дается формулами (индексы у элементов малой планеты, не нужные в дальнейшем, опускаем)

$$\left.\begin{aligned} e\sin\pi &= B\sin(gt+\beta)+\Delta h, \\ e\cos\pi &= B\cos(gt+\beta)+\Delta k, \end{aligned}\right\} \tag{8.4}$$

где

$$\left.\begin{matrix}\Delta h \\ \Delta k\end{matrix}\right\} = \sum_{1}^{m} \frac{B_\mu}{g-g_\mu} \begin{matrix}\sin \\ \cos\end{matrix} (g_\mu t+\beta_\mu), \tag{8.5}$$

а через B и β обозначены постоянные интегрирования.

Величины (8.5) представляют вынужденные колебания элементов малой планеты, тогда как первые члены в правых частях равенств (8.4) выражают собственные колебания этих элементов.

Обратимся теперь к лагранжевым элементам, определяющим положение плоскости орбиты. Вместо элементов

$$p = \operatorname{tg} i \sin\Omega, \qquad q = \operatorname{tg} i \cos\Omega,$$

которыми мы пользовались до сих пор, возьмем элементы

$$p = \sin i \sin\Omega, \qquad q = \sin i \cos\Omega,$$

употребляемые во многих работах.

И в том и в другом случае выражения (5.3) и уравнения (5.5) в пределах принятой нами точности одинаковы.

Аналогично только что рассмотренному случаю получим

$$\left.\begin{aligned} \sin i\sin\Omega &= C\sin(-gt+\gamma)+\Delta p, \\ \sin i\cos\Omega &= C\cos(-gt+\gamma)+\Delta q, \end{aligned}\right\} \tag{8.6}$$

где g имеет то же самое значение (8.3),

$$\left.\begin{matrix}\Delta p \\ \Delta q\end{matrix}\right\} = \sum_{1}^{m} \frac{C_\mu}{g+f_\mu} \begin{matrix}\sin \\ \cos\end{matrix} (f_\mu t+\gamma_\mu), \tag{8.7}$$

а C и γ — постоянные, характеризующие собственные колебания рассматриваемых элементов.

Подробное исследование формул (8.4) и (8.6), в частности, условий возможности резонанса, было выполнено Шарлье [1902].

Когда вековые возмущения системы больших планет, выражаемые формулами (6.6) и (6.7), найдены, то величины (8.5) и (8.7) легко могут быть затабулированы, так как они будут функцией лишь большой полуоси орбиты малой планеты. В уже упомянутой работе Брауэра и Вуркома [1950] даны пятизначные таблицы этих величин для значений a от 1,90 до 4,25.

Величины B, C и

$$\pi^* = gt + \beta, \quad \Omega^* = -gt + \gamma,$$

представляющие собой род средних элементов, лучше характеризуют общие свойства движения малой планеты, нежели оскулирующие элементы e, $\sin i$, π и Ω, для какого-либо определенного момента. Хирайама предложил назвать эти величины (вместе с a) собственными элементами малой планеты. В ряде работ, опубликованных с 1919 по 1933 г., он показал, что значительное число малых планет образует семейства, характеризуемые очень близкими между собою значениями собственных элементов a, B и C [Хирайама, 1923—1928]. Эти исследования были существенно дополнены Брауэром [1951].

Согласно Брауэру имеется девять семейств, причем число входящих в семейство планет колеблется от 9 до 62. В качестве примера укажем «семейство Коронис», насчитывающее 33 планеты, для которых

$$2{,}8436 \leqslant a \leqslant 2{,}9046; \quad 0{,}0412 \leqslant B \leqslant 0{,}0658; \quad 0{,}0338 \leqslant C \leqslant 0{,}0422,$$

тогда как для всех 1537 рассмотренных Брауэром планет имеем

$$2{,}15 \leqslant a \leqslant 4{,}26, \quad 0{,}0000 \leqslant B \leqslant 0{,}5491, \quad 0{,}0069 \leqslant C \leqslant 0{,}6483.$$

Помимо семейств, существуют еще, как указал Брауэр, группы малых планет, характеризуемые тесной концентрацией значений a и суммы

$$\pi^* + \Omega^* = \beta + \gamma.$$

Таких групп он насчитал 19.

Семейства Хирайамы и группы Брауэра объединяют в общей сложности 458 малых планет из 1537 подвергнутых изучению. Дальнейшее изучение этих особенностей кольца малых планет может принести существенную пользу для выяснения многих вопросов эволюции солнечной системы.