ГЛАВА XIX

АНАЛИТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ НАХОЖДЕНИЯ ВОЗМУЩЕННЫХ КООРДИНАТ

§ 1. Уравнения движения в цилиндрических координатах

В работах Эйлера, положивших начало созданию аналитических теорий движения планет (§ 2 гл. II), уже были даны методы для прямого получения возмущенных координат. В дальнейшем внимание Эйлера и его ближайших продолжателей, Лагранжа и Лапласа, было обращено главным образом на разработку методов получения возмущенных элементов.

Но когда Лаплас поставил перед собой задачу создания высокоточных теорий движения планет, он снова обратился к прямому нахождению возмущений координат, минуя вычисление возмущений элементов. Разработанный Лапласом метод, являющийся дальнейшим развитием применявшегося Эйлером интегрирования уравнений движения в цилиндрических координатах, не потерял своего значения и в настоящее время.

Обозначим через x, y, z координаты планеты P, имеющей массу m, относительно неподвижной системы координат с началом в центре Солнца S.

Чтобы получить уравнения движения в цилиндрических координатах (ρ, v, z), определяемых соотношениями

$$x=\rho\cos v,\qquad y=\rho\sin v,\qquad r^2=\rho^2+z^2,$$

заметим, что кинетическая энергия в этих координатах дается выражением

$$T=\frac{1}{2}m(\dot{\rho}^2+\rho^2\dot{v}^2+\dot{z}^2).$$

В уравнениях Лагранжа

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k}\right)-\frac{\partial T}{\partial q_k}=Q_k$$

примем $q_1=\rho$, $q_2=v$, $q_3=z$. Обозначив через T_1, T_2 и T_3 компоненты ускорения точки P по направлению укороченного радиусавектора ρ, по направлению перпендикуляра к нему в плоскости xy, в сторону увеличения углов v и по направлению оси z, будем иметь

$$Q_1=mT_1, \qquad Q_2=m\rho T_2, \qquad Q_3=mT_3.$$

Таким образом, уравнения движения в цилиндрических координатах имеют вид

$$\ddot{\rho}-\rho\dot{v}^2=T_1, \quad \frac{d}{dt}(\rho^2\dot{v})=\rho T_2, \quad \ddot{z}=T_3. \tag{1.1}$$

В том случае, когда существует функция сил mU, эти уравнения можно написать так:

$$\ddot{\rho}-\rho\dot{v}^2=\frac{\partial U}{\partial\rho}, \quad \frac{d}{dt}(\rho^2\dot{v})=\frac{\partial U}{\partial v}, \quad \ddot{z}=\frac{\partial U}{\partial z}. \tag{1.2}$$

Если рассматривается возмущенное движение планеты P, то

$$U=k_1^2r^{-1}+R,$$

где первый член соответствует невозмущенному движению, а R представляет пертурбационную функцию. Через k_1^2 здесь для краткости обозначена величина $k^2(1+m)$.

Уравнения (1.2) принимают здесь следующий вид:

$$\left.\begin{aligned} \ddot{\rho}-\rho\dot{v}^2+k_1^2\rho r^{-3}&=\partial R/\partial\rho,\\ \frac{d}{dt}(\rho^2\dot{v})&=\partial R/\partial v,\\ \ddot{z}+k_1^2zr^{-3}&=\partial R/\partial z. \end{aligned}\right\} \tag{1.3}$$

В случае невозмущенного движения, когда $R=0$, движение происходит в неподвижной плоскости, проходящей через S.

Если принять эту плоскость за координатную плоскость Sxy, то будем иметь $z=0$, $\rho=r$. Решение уравнений (1.3) дается в этом случае хорошо известными формулами:

$$\left.\begin{aligned} E-e\sin E&=k_1a^{-3/2}(t-t_0),\\ \operatorname{tg}\frac{1}{2}(v-v_0)&=\left(\frac{1+e}{1-e}\right)^{1/2}\operatorname{tg}\frac{1}{2}E,\\ r&=\frac{a(1-e^2)}{1+e\cos(v-v_0)}, \end{aligned}\right\} \tag{1.4}$$

где через a, e, v_0 и t_0 обозначены постоянные, введенные интегрированием.

§ 2. Уравнения Клеро—Лапласа

Формулы (1.4) показывают, что r и t выражаются через v проще, нежели r и v через t. Это навело на мысль принять и при изучении возмущенного движения за независимую перемен-