вектора ρ, по направлению перпендикуляра к нему в плоскости xy, в сторону увеличения углов v и по направлению оси z, будем иметь

$$Q_1 = mT_1, \qquad Q_2 = m\rho T_2, \qquad Q_3 = mT_3.$$

Таким образом, уравнения движения в цилиндрических координатах имеют вид

$$\ddot{\rho} - \rho\dot{v}^2 = T_1, \quad \frac{d}{dt}(\rho^2\dot{v}) = \rho T_2, \quad \ddot{z} = T_3. \tag{1.1}$$

В том случае, когда существует функция сил mU, эти уравнения можно написать так:

$$\ddot{\rho} - \rho\dot{v}^2 = \frac{\partial U}{\partial \rho}, \quad \frac{d}{dt}(\rho^2\dot{v}) = \frac{\partial U}{\partial v}, \quad \ddot{z} = \frac{\partial U}{\partial z}. \tag{1.2}$$

Если рассматривается возмущенное движение планеты P, то

$$U = k_1^2 r^{-1} + R,$$

где первый член соответствует невозмущенному движению, а R представляет пертурбационную функцию. Через k_1^2 здесь для краткости обозначена величина $k^2(1+m)$.

Уравнения (1.2) принимают здесь следующий вид:

$$\left.\begin{aligned} \ddot{\rho} - \rho\dot{v}^2 + k_1^2\rho r^{-3} &= \partial R/\partial\rho, \\ \frac{d}{dt}(\rho^2\dot{v}) &= \partial R/\partial v, \\ \ddot{z} + k_1^2 z r^{-3} &= \partial R/\partial z. \end{aligned}\right\} \tag{1.3}$$

В случае невозмущенного движения, когда $R=0$, движение происходит в неподвижной плоскости, проходящей через S.

Если принять эту плоскость за координатную плоскость Sxy, то будем иметь $z=0$, $\rho=r$. Решение уравнений (1.3) дается в этом случае хорошо известными формулами:

$$\left.\begin{aligned} E - e\sin E &= k_1 a^{-3/2}(t - t_0), \\ \operatorname{tg}\frac{1}{2}(v - v_0) &= \left(\frac{1+e}{1-e}\right)^{1/2} \operatorname{tg}\frac{1}{2}E, \\ r &= \frac{a(1-e^2)}{1 + e\cos(v - v_0)}, \end{aligned}\right\} \tag{1.4}$$

где через a, e, v_0 и t_0 обозначены постоянные, введенные интегрированием.

§ 2. Уравнения Клеро—Лапласа

Формулы (1.4) показывают, что r и t выражаются через v проще, нежели r и v через t. Это навело на мысль принять и при изучении возмущенного движения за независимую переменную не время t, а долготу v. Поскольку возмущенное движение мало отличается от невозмущенного, естественно ожидать, что такая замена независимой переменной будет способствовать большей простоте решения.

С другой стороны, в то время как радиус-вектор r, рассматриваемый как функция v, дается довольно сложным дифференциальным уравнением, его обратная величина

$$u = r^{-1} = a^{-1}(1-e^2)^{-1}[1+e\cos(v-v_0)]$$

удовлетворяет весьма простому уравнению:

$$\frac{d^2u}{dv^2} + u = a^{-1}(1-e^2)^{-1}.$$

Все эти соображения побудили принять за искомые величины

$$u = 1/\rho; \quad s = z/\rho; \quad t,$$

а за независимую переменную v.

Положив

$$\rho^2\frac{dv}{dt} = H,$$

откуда

$$\frac{dv}{dt} = Hu^2,$$

легко заменить производные по t производными по v. Имеем

$$\begin{aligned}\frac{d^2\rho}{dt^2} = \frac{d}{dt}\left(\frac{d\rho}{dt}\right) &= Hu^2\frac{d}{dv}\left(Hu^2\frac{d\rho}{dv}\right) = \\ &= -Hu^2\frac{d}{dv}\left(H\frac{du}{dv}\right) = \\ &= -H^2u^2\frac{d^2u}{dv^2} - Hu^2\frac{dH}{dv}\frac{du}{dv}.\end{aligned}$$

Поэтому первое из уравнений (1.1) принимает вид

$$H^2u^2\left(\frac{d^2u}{dv^2} + u\right) + H\frac{dH}{dv}u^2\frac{du}{dv} = -T_1. \tag{2.1}$$

Второе из этих уравнений теперь напишется так

$$H\frac{dH}{dv} = u^{-3}T_2. \tag{2.2}$$

В третье из уравнений (1.1) подставим $z = s\cdot u^{-1}$. Замечая, что

$$\begin{aligned}\frac{d^2(su^{-1})}{dt^2} &= Hu^2\frac{d}{dv}\left(Hu^2\frac{d(su^{-1})}{dv}\right) = \\ &= H^2u^2\left(u\frac{d^2s}{dv^2} - s\frac{d^2u}{dv^2}\right) + H\frac{dH}{dv}u^2\left(u\frac{ds}{dv} - s\frac{du}{dv}\right)\end{aligned}$$

и исключая отсюда вторую производную u при помощи соотношения (2.1), получим

$$H^2u^3\left(\frac{d^2s}{dv^2}+s\right)+H\frac{dH}{dv}u^3\frac{ds}{dv}=T_3-sT_1.$$

Входящую сюда производную H исключим при помощи равенства (2.2). Окончательно будем иметь уравнения, которые можно написать так:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{d^2u}{dv^2}+u=H^{-2}u^{-2}\left(-T_1-T_2u^{-1}\frac{du}{dv}\right),\\
&\frac{d^2s}{dv^2}+s=H^{-2}u^{-3}\left(-sT_1-\frac{ds}{dv}T_2+T_3\right),\\
&H\frac{dH}{dv}=u^{-3}T_2.
\end{aligned}\right\} \tag{2.3}$$

После того как решение уравнений (2.3) даст величины u, s и H в функции v, нужно еще найти t в функции v. Для этого служит уравнение

$$dt=H^{-1}u^{-2}\,dv. \tag{2.4}$$

Полученные уравнения можно представить в другом виде, исключив из них вспомогательную величину H. Соотношение (2.2) дает

$$H^2=H_0^2+2\int_0^v T_2u^{-3}\,dv,$$

где H_0 — постоянная, введенная интегрированием.

Пользуясь этим соотношением, уравнения (2.3) и (2.4) можно заменить такими:

$$\left.\begin{aligned}
&\left(H_0^2+2\int T_2u^{-3}\,dv\right)\left(\frac{d^2u}{dv^2}+u\right)=u^{-2}\left(-T_1-\frac{1}{u}\frac{du}{dv}T_2\right),\\
&\left(H_0^2+2\int T_2u^{-3}\,dv\right)\left(\frac{d^2s}{dv^2}+s\right)=u^{-3}\left(-sT_1-\frac{ds}{dv}T_2+T_3\right),\\
&dt=u^{-2}\left(H_0^2+2\int T_2u^{-3}\,dv\right)^{-1/2}dv.
\end{aligned}\right\} \tag{2.5}$$

Напишем еще эти уравнения для того случая, когда существует функция сил U. В этом случае

$$T_1=\partial U/\partial\rho,\quad \rho T_2=\partial U/\partial v,\quad T_3=\partial U/\partial z,$$

а так как из равенства

$$U(u,\ v,\ s)=U(\rho^{-1},\ v,\ z\rho^{-1})$$

следует

$$\frac{\partial U}{\partial\rho}=-u^2\frac{\partial U}{\partial u}-su\frac{\partial U}{\partial s};\quad \frac{\partial U}{\partial z}=u\frac{\partial U}{\partial s},$$

то окончательно получим

$$\left.\begin{aligned}\left(H_0^2+2\int u^{-2}\frac{\partial U}{\partial v}\,dv\right)\left(\frac{d^2u}{dv^2}+u\right)&=\\&=\frac{\partial U}{\partial u}-u^{-2}\frac{du}{dv}\frac{\partial U}{\partial v}+su^{-1}\frac{\partial U}{\partial s},\\\left(H_0^2+2\int u^{-2}\frac{\partial U}{\partial v}\,dv\right)\left(\frac{d^2s}{dv^2}+s\right)&=\\&=su^{-1}\frac{\partial U}{\partial u}-u^{-2}\frac{ds}{dv}\frac{\partial U}{\partial v}+u^{-2}(1+s^2)\frac{\partial U}{\partial s},\\dt=u^{-2}\left(H_0^2+2\int u^{-2}\frac{\partial U}{\partial v}\,dv\right)^{-1/2}dv.\end{aligned}\right\}\tag{2.6}$$

В таком виде эти уравнения были впервые даны Лапласом, но основные идеи — употребление долготы в качестве независимой переменной v и введение обратной величины ρ в качестве неизвестной — принадлежат Клеро.

Уравнения (2.6) были выведены Клеро для случая $s=0$ и применены к изучению возмущений в движении Луны, производимых Солнцем, — в предположении, что Луна движется в плоскости эклиптики. Уравнения (2.3) и (2.4) были широко использованы Адамсом в его работах по теории движения Луны.

§ 3. Метод Лапласа

В основе метода Лапласа, с рассмотрения которого мы начнем изучение методов, дающих аналитические выражения возмущенных координат, лежит своеобразное использование уравнений (1.3), служащих для изучения возмущенного движения в цилиндрических координатах.

За плоскость xy, определяющую цилиндрическую систему координат ρ, v, z, Лаплас принимает плоскость оскулирующей орбиты в момент t, что дает $\rho=r$, $z=0$. Затем он показывает, что долготу v можно заменить (пренебрегая величинами второго порядка относительно возмущающих сил) долготой в неподвижной плоскости, а именно в плоскости оскулирующей орбиты для некоторого определенного момента t_0. Таким образом для радиуса-вектора r и долготы в плоскости оскулирующей орбиты (эту долготу мы теперь будем обозначать через w) уравнения (1.3) дают

$$\frac{d^2r}{dt^2}-r\left(\frac{dw}{dt}\right)^2+k_1^2r^{-2}=\frac{\partial R}{\partial r},\tag{3.1}$$

$$\frac{d}{dt}\left(r^2\frac{dw}{dt}\right)=\frac{\partial R}{\partial w}.\tag{3.2}$$