то окончательно получим

$$\left.\begin{aligned}
&\left(H_0^2+2\int u^{-2}\frac{\partial U}{\partial v}\,dv\right)\left(\frac{d^2u}{dv^2}+u\right)=\\
&\qquad\qquad=\frac{\partial U}{\partial u}-u^{-2}\frac{du}{dv}\frac{\partial U}{\partial v}+su^{-1}\frac{\partial U}{\partial s},\\
&\left(H_0^2+2\int u^{-2}\frac{\partial U}{\partial v}\,dv\right)\left(\frac{d^2s}{dv^2}+s\right)=\\
&\qquad\qquad=su^{-1}\frac{\partial U}{\partial u}-u^{-2}\frac{ds}{dv}\frac{\partial U}{\partial v}+u^{-2}(1+s^2)\frac{\partial U}{\partial s},\\
&\qquad dt=u^{-2}\left(H_0^2+2\int u^{-2}\frac{\partial U}{\partial v}\,dv\right)^{-1/2}dv.
\end{aligned}\right\}\tag{2.6}$$

В таком виде эти уравнения были впервые даны Лапласом, но основные идеи — употребление долготы в качестве независимой переменной v и введение обратной величины ρ в качестве неизвестной — принадлежат Клеро.

Уравнения (2.6) были выведены Клеро для случая $s=0$ и применены к изучению возмущений в движении Луны, производимых Солнцем, — в предположении, что Луна движется в плоскости эклиптики. Уравнения (2.3) и (2.4) были широко использованы Адамсом в его работах по теории движения Луны.

§ 3. Метод Лапласа

В основе метода Лапласа, с рассмотрения которого мы начнем изучение методов, дающих аналитические выражения возмущенных координат, лежит своеобразное использование уравнений (1.3), служащих для изучения возмущенного движения в цилиндрических координатах.

За плоскость xy, определяющую цилиндрическую систему координат ρ, v, z, Лаплас принимает плоскость оскулирующей орбиты в момент t, что дает $\rho=r$, $z=0$. Затем он показывает, что долготу v можно заменить (пренебрегая величинами второго порядка относительно возмущающих сил) долготой в неподвижной плоскости, а именно в плоскости оскулирующей орбиты для некоторого определенного момента t_0. Таким образом для радиуса-вектора r и долготы в плоскости оскулирующей орбиты (эту долготу мы теперь будем обозначать через w) уравнения (1.3) дают

$$\frac{d^2r}{dt^2}-r\left(\frac{dw}{dt}\right)^2+k_1^2r^{-2}=\frac{\partial R}{\partial r},\tag{3.1}$$

$$\frac{d}{dt}\left(r^2\frac{dw}{dt}\right)=\frac{\partial R}{\partial w}.\tag{3.2}$$

Ганзен показал (см. § 7), что эти уравнения являются совершенно точными, если долготу w отсчитывать от направления в плоскости оскулирующей орбиты, соответствующим образом определенного.

Умножим первое из этих уравнений на $2\frac{dr}{dt}$, второе на $2\frac{dw}{dt}$, сложим их и проинтегрируем. Это даст

$$\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + r^2\left(\frac{dw}{dt}\right)^2 - 2k_1^2 r^{-1} = 2C + 2\int d'R, \tag{3.3}$$

где для краткости положено

$$d'R = \left(\frac{\partial R}{\partial r}\frac{dr}{dt} + \frac{\partial R}{\partial w}\frac{dw}{dt}\right)dt.$$

Умножив равенство (3.1) на r и сложив его почленно с (3.3), получим

$$\frac{1}{2}\frac{d^2(r^2)}{dt^2} - k_1^2 r^{-1} = 2C + r\frac{\partial R}{\partial r} + 2\int d'R. \tag{3.4}$$

Обозначим через r_0 и w_0 координаты, соответствующие невозмущенному движению, и положим

$$r = r_0 + \delta r, \qquad w = w_0 + \delta w.$$

Подстановка этих выражений в (3.4) и (3.2) дает

$$\frac{d^2(r_0\delta r)}{dt^2} + k_1^2 r_0^{-3}(r_0\delta r) = r_0\frac{\partial R}{\partial r_0} + 2\int d'R + G_2, \tag{3.5}$$

$$2r_0^2\frac{dw_0}{dt}\frac{d\,\delta w}{dt} + \frac{d^2 r_0}{dt^2}\delta r - r_0\frac{d^2\,\delta r}{dt^2} + \frac{3k_1^2 r_0\,\delta r}{r_0^3} = -r_0\frac{\partial R}{\partial r_0} + H_2, \tag{3.6}$$

где через G_2 и H_2 обозначены совокупности членов не ниже чем второго порядка.

В невозмущенном движении

$$r_0^2\frac{dw_0}{dt} = k_1\sqrt{a(1-e^2)},$$

или, так как

$$e = \sin\varphi; \quad k_1 = na^{3/2},$$

то

$$r_0^2\frac{dw_0}{dt} = na^2\cos\varphi.$$

Поэтому уравнение (3.6) после вычитания из него уравнения (3.5), умноженного на 3, можно написать так:

$$a^2 n\cos\varphi\frac{d\,\delta w}{dt} = \frac{d}{dt}\left(2r_0\frac{d\,\delta r}{dt} + \delta r\frac{dr_0}{dt}\right) - 3\int d'R - 2r_0\frac{\partial R}{\partial r_0} + J_2, \tag{3.7}$$

где J_2 обозначает совокупность членов второго и высших порядков.

Уравнение (3.5) служит для нахождения возмущений радиуса-вектора. Решение этого уравнения приводится к повторному интегрированию уравнения вида

$$\ddot{q} + k_1^2 r_0^{-3} q = Q, \tag{3.8}$$

где $k_1^2 r_0^{-3}$ и Q — известные функции t. В самом деле, для получения возмущений первого порядка надо в правой части уравнения (3.5) отбросить G_2 и вычислить пертурбационную функцию R при помощи невозмущенных значений координат планеты, что даст для Q вполне известную функцию t. При вычислении возмущений второго порядка, входящих в δr, мы найдем правую часть уравнения (3.5) с точностью до членов второго порядка включительно при помощи уже найденных возмущений первого порядка, и т. д.

Линейное неоднородное уравнение второго порядка вида (3.8) можно было бы решать методом вариации произвольных постоянных в его обычной форме. Но для нашей цели удобнее поступить несколько иначе.

Пусть для соответствующего (3.8) однородного уравнения

$$\ddot{q} + k_1^2 r_0^{-3} q = 0 \tag{3.9}$$

известны два линейно независимых решения q_1 и q_2, так что

$$\ddot{q}_1 + k_1^2 r_0^{-3} q_1 = 0; \quad \ddot{q}_2 + k_1^2 r_0^{-3} q_2 = 0. \tag{3.10}$$

Исключение величины $k_1^2 r_0^{-3}$ из этих равенств дает

$$q_1 \ddot{q}_2 - q_2 \ddot{q}_1 = 0,$$

откуда

$$q_1 \dot{q}_2 - q_2 \dot{q}_1 = C,$$

где постоянная C не равна нулю.

С другой стороны, исключение той же величины из уравнения (3.8) при помощи каждого из соотношений (3.10) дает

$$q_1 \ddot{q} - q \ddot{q}_1 = Q q_1; \quad q_2 \ddot{q} - q \ddot{q}_2 = Q q_2.$$

Отсюда, обозначив через K_1, K_2 постоянные, введенные интегрированием, получим

$$q_1 \dot{q} - q \dot{q}_1 = K_2 + \int q_1 Q \, dt,$$

$$q_2 \dot{q} - q \dot{q}_2 = -K_1 + \int q_2 Q \, dt.$$

Исключив из этих равенств $\dot{q}$, будем иметь искомое решение уравнения (3.8) в таком виде:

$$Cq = K_1 q_1 + K_2 q_2 + q_2 \int q_1 Q\,dt - q_1 \int q_2 Q\,dt, \tag{3.11}$$

или

$$Cq = q_2 \int q_1 Q\,dt - q_1 \int q_2 Q\,dt, \tag{3.12}$$

если оставить нижние пределы интегралов неопределенными.

Мы знаем, что орбитальные прямоугольные координаты

$$\xi = a(\cos E - e); \qquad \eta = a \cos\varphi \sin E$$

удовлетворяют однородному уравнению (3.9). Сообразно с этим, можно положить

$$q_1 = \cos E - e; \quad q_2 = \sin E, \tag{3.13}$$

откуда

$$C = q_1 \dot{q}_2 - q_2 \dot{q}_1 = (1 - e\cos E)\dot{E} = n.$$

Таким образом, решение уравнения (3.5) можно написать, пользуясь формулой (3.12), так:

$$r_0 \delta r = n^{-1} q_2 \int q_1 Q\,dt - n^{-1} q_1 \int q_2 Q\,dt, \tag{3.14}$$

где q_1 и q_2 определяются равенствами (3.13).

В созданных им теориях движения больших планет Лаплас [1803] ограничился почти исключительно возмущениями первого порядка. Влияние очень немногих принятых им во внимание вековых и долгопериодических членов второго порядка было учтено дополнительно.

Для вычисления возмущения первого порядка радиуса-вектора, которое мы обозначим через $\delta_1 r$, Лаплас применил следующий прием.

Так как (§ 10 гл. VI)

$$\left(\frac{a}{r_0}\right)^3 = 1 + \frac{3}{2}e^2 + \frac{15}{8}e^4 + \ldots + \left(3e + \frac{27}{8}e^3 + \ldots\right)\cos M + \\ + \left(\frac{9}{2}e^2 + \frac{7}{2}e^4 + \ldots\right)\cos 2M + \ldots, \tag{3.15}$$

то уравнение (3.5) дает

$$\frac{d^2(r_0\delta_1 r)}{dt^2} + n_1^2 (r_0 \delta_1 r) = \\ = 2\int d'R + r_0 \frac{\partial R}{\partial r_0} - n^2 (r_0 \delta_1 r)\left[\left(3e + \frac{27}{8}e^3 + \ldots\right)\cos M + \right. \\ \left. + \left(\frac{9}{2}e^2 + \ldots\right)\cos 2M + \ldots\right],$$

где

$$n_1^2 = k_1^2 a^{-3}\left(1 + \frac{3}{2}e^2 + \frac{15}{8}e^4 + \ldots\right) = n^2\left(1 + \frac{3}{2}e^2 + \ldots\right).$$

Это уравнение позволяет легко найти $\delta_1 r$ последовательными приближениями, быстро сходящимися при малых значениях эксцентриситета e. В каждом приближении придется решать линейное уравнение с постоянными коэффициентами и со второй частью, состоящей из суммы членов вида

$$A\cos(\nu t + \beta). \tag{3.16}$$

Каждому такому члену в $r_0\delta_1 r$ будет соответствовать член

$$\frac{A}{n_1^2 - \nu^2}\cos(\nu t + \beta), \tag{3.17}$$

если $\nu \neq n_1$, и

$$\frac{At}{2n_1}\sin(n_1 t + \beta),$$

если $\nu = n_1$.

Чтобы избежать появления вековых членов в $\delta_1 r$, Лаплас вычисляет r_0 при помощи элементов, к которым уже приданы их вековые изменения. Вследствие этого величины A, ν и β в (3.16) становятся функциями t. Весьма медленное изменение этих функций позволяет заменить каждый из членов (3.17) выражением

$$\frac{A}{n_1^2 - \nu^2}\cos(\nu t + \beta) + \cos\nu t\left[\frac{2\nu}{(n_1^2 - \nu^2)^2}\frac{d(A\sin\beta)}{dt} + \ldots\right] - \\ - \sin\nu t\left[\frac{2\nu}{(n_1^2 - \nu^2)^2}\frac{d(A\cos\beta)}{dt} + \ldots\right].$$

Для получения входящих сюда производных Лаплас находит численные значения $A\sin\beta$ и $A\cos\beta$, а затем применяет интерполяционные формулы.

§ 4. Метод Лапласа (продолжение)

Обратимся теперь к нахождению долготы в орбите, для чего Лаплас применяет уравнение (3.7).

В том случае, когда ищутся возмущения первого порядка, это уравнение принимает вид

$$na^2\cos\varphi\frac{d\delta_1 w}{dt} = \frac{d}{dt}\left(2r_0\frac{d\delta_1 r}{dt} + \delta_1 r\frac{dr_0}{dt}\right) - 2r_0\frac{\partial R}{\partial r_0} - 3\int d'R. \tag{4.1}$$