где

$$n_1^2 = k_1^2 a^{-3}\left(1 + \frac{3}{2}e^2 + \frac{15}{8}e^4 + \ldots\right) = n^2\left(1 + \frac{3}{2}e^2 + \ldots\right).$$

Это уравнение позволяет легко найти $\delta_1 r$ последовательными приближениями, быстро сходящимися при малых значениях эксцентриситета e. В каждом приближении придется решать линейное уравнение с постоянными коэффициентами и со второй частью, состоящей из суммы членов вида

$$A\cos(\nu t + \beta). \tag{3.16}$$

Каждому такому члену в $r_0\delta_1 r$ будет соответствовать член

$$\frac{A}{n_1^2 - \nu^2}\cos(\nu t + \beta), \tag{3.17}$$

если $\nu \neq n_1$, и

$$\frac{At}{2n_1}\sin(n_1 t + \beta),$$

если $\nu = n_1$.

Чтобы избежать появления вековых членов в $\delta_1 r$, Лаплас вычисляет r_0 при помощи элементов, к которым уже приданы их вековые изменения. Вследствие этого величины A, ν и β в (3.16) становятся функциями t. Весьма медленное изменение этих функций позволяет заменить каждый из членов (3.17) выражением

$$\frac{A}{n_1^2 - \nu^2}\cos(\nu t + \beta) + \cos\nu t\left[\frac{2\nu}{(n_1^2 - \nu^2)^2}\frac{d(A\sin\beta)}{dt} + \ldots\right] - \\ - \sin\nu t\left[\frac{2\nu}{(n_1^2 - \nu^2)^2}\frac{d(A\cos\beta)}{dt} + \ldots\right].$$

Для получения входящих сюда производных Лаплас находит численные значения $A\sin\beta$ и $A\cos\beta$, а затем применяет интерполяционные формулы.

§ 4. Метод Лапласа (продолжение)

Обратимся теперь к нахождению долготы в орбите, для чего Лаплас применяет уравнение (3.7).

В том случае, когда ищутся возмущения первого порядка, это уравнение принимает вид

$$na^2\cos\varphi\frac{d\delta_1 w}{dt} = \frac{d}{dt}\left(2r_0\frac{d\delta_1 r}{dt} + \delta_1 r\frac{dr_0}{dt}\right) - 2r_0\frac{\partial R}{\partial r_0} - 3\int d'R. \tag{4.1}$$

Так как $\delta_1 r$ уже найдено, то решение уравнения (4.1) приводится к выполнению квадратур двух видов

$$\left.\begin{aligned} \int A\cos(\nu t+\beta)\,dt &= A\nu^{-1}\sin(\nu t+\beta), \\ \int dt\int A\sin(\nu t+\beta)\,dt &= -A\nu^{-2}\sin(\nu t+\beta), \end{aligned}\right\} \tag{4.2}$$

если A, ν и β рассматривать как постоянные величины. Если же, как это обычно делается, правая часть (4.1) вычисляется при помощи элементов, уже включающих вековые изменения, то вместо формул (4.2) приходится употреблять такие:

$$\begin{aligned} \int A\cos(\nu t+\beta)\,dt = A\nu^{-1}\sin(\nu t+\beta) &- \\ -\sin\nu t\left\{\nu^{-2}\frac{d(A\sin\beta)}{dt}+\nu^{-3}\frac{d^2(A\cos\beta)}{dt^2}+\ldots\right\} &+ \\ +\cos\nu t\left\{\nu^{-2}\frac{d(A\cos\beta)}{dt}-\nu^{-3}\frac{d^2(A\sin\beta)}{dt^2}+\ldots\right\}&, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int dt\int A\sin(\nu t+\beta)\,dt = -A\nu^{-2}\sin(\nu t+\beta) &+ \\ +\sin\nu t\left\{2\nu^{-3}\frac{d(A\sin\beta)}{dt}+3\nu^{-4}\frac{d^2(A\cos\beta)}{dt^2}+\ldots\right\} &- \\ -\cos\nu t\left\{2\nu^{-3}\frac{d(A\cos\beta)}{dt}-3\nu^{-4}\frac{d^2(A\sin\beta)}{dt^2}+\ldots\right\}&. \end{aligned}$$

Величины $r=r_0+\delta_1 r$ и $w=w_0+\delta_1 w$ фиксируют положение планеты в плоскости оскулирующей орбиты для рассматриваемого момента t. Делая ошибку второго порядка относительно возмущающих сил, мы можем w отождествить с долготой, отсчитываемой в некоторой неподвижной плоскости. За такую плоскость можно принять, как уже было отмечено, плоскость оскулирующей орбиты в некоторый фиксированный момент t_0. Чтобы закончить нахождение положения планеты, нам остается найти третью координату z, определяющую положение планеты относительно выбранной неподвижной плоскости.

Для этого служит последнее из уравнений (1.3), а именно,

$$\frac{d^2z}{dt^2}+k_1^2r^{-3}z=\partial R/\partial z.$$

Вместо z Лаплас пользуется величиной $s=z/r$, равной синусу широты планеты относительно неподвижной плоскости. Полагая $s=s_0+\delta s$ и замечая, что $s_0=0$, получим

$$\frac{d^2(r_0\delta_1 s)}{dt^2}+k_1^2r_0^{-3}(r_0\delta_1 s)=\partial R/\partial z.$$

Это уравнение имеет вид (3.8) и потому легко может быть решено указанными в предыдущем параграфе способами. Способ, основанный на употреблении разложения (3.15), даст $r_0\delta_1 s$ в виде ряда, расположенного по степеням эксцентриситета.

§ 5. Метод Лапласа—Ньюкома

Ньюком в своих обширных работах (начатых в 1867 г. и завершенных в 1898 г.) по созданию высокоточных теорий движения больших планет использовал исключительно метод Лапласа. Стремясь к получению большей точности, с одной стороны, и к построению возможно более удобных таблиц, с другой, — Ньюком внес в метод Лапласа ряд изменений.

Имея в виду удобство пользования таблицами, Ньюком ищет возмущения не радиуса-вектора, а его логарифма. Положим

$$\rho = \ln r, \quad \rho_0 = \ln r_0 \tag{5.1}$$

и выведем уравнение, дающее величину

$$\delta\rho = \rho - \rho_0. \tag{5.2}$$

Очевидно,

$$r\frac{\partial R}{\partial r} = \frac{\partial R}{\partial \rho},$$

вследствие чего уравнение (3.4) дает

$$\frac{1}{2}\frac{d^2(r^2)}{dt^2} - k_1^2 r^{-1} = 2C + \frac{\partial R}{\partial \rho} + 2\int d'R.$$

Для невозмущенного движения имеем

$$\frac{1}{2}\frac{d^2(r_0^2)}{dt^2} - k_1^2 r_0^{-1} = 2C.$$

Следовательно,

$$\frac{1}{2}\frac{d^2}{dt^2}\left(r^2 - r_0^2\right) - k_1^2\left(r^{-1} - r_0^{-1}\right) = \frac{\partial R}{\partial \rho} + 2\int d'R. \tag{5.3}$$

Равенства (5.1) и (5.2) дают

$$r^2 = \exp(2\rho_0 + 2\delta\rho) = r_0^2 \exp(2\delta\rho),$$

откуда

$$\frac{1}{2}\left(r^2 - r_0^2\right) = r_0^2\delta\rho + r_0^2(\delta\rho)^2 + \ldots$$

Аналогично,

$$r^{-1} - r_0^{-1} = -r_0^{-1}\delta\rho + \frac{1}{2}r_0^{-1}(\delta\rho)^2 + \ldots$$

Эти выражения подставим в уравнение (5.3), причем с левой стороны оставим лишь члены первого порядка, а члены второго