Это уравнение имеет вид (3.8) и потому легко может быть решено указанными в предыдущем параграфе способами. Способ, основанный на употреблении разложения (3.15), даст $r_0\delta_1 s$ в виде ряда, расположенного по степеням эксцентриситета.

§ 5. Метод Лапласа—Ньюкома

Ньюком в своих обширных работах (начатых в 1867 г. и завершенных в 1898 г.) по созданию высокоточных теорий движения больших планет использовал исключительно метод Лапласа. Стремясь к получению большей точности, с одной стороны, и к построению возможно более удобных таблиц, с другой, — Ньюком внес в метод Лапласа ряд изменений.

Имея в виду удобство пользования таблицами, Ньюком ищет возмущения не радиуса-вектора, а его логарифма. Положим

$$\rho = \ln r, \quad \rho_0 = \ln r_0 \tag{5.1}$$

и выведем уравнение, дающее величину

$$\delta\rho = \rho - \rho_0. \tag{5.2}$$

Очевидно,

$$r\frac{\partial R}{\partial r} = \frac{\partial R}{\partial \rho},$$

вследствие чего уравнение (3.4) дает

$$\frac{1}{2}\frac{d^2(r^2)}{dt^2} - k_1^2 r^{-1} = 2C + \frac{\partial R}{\partial \rho} + 2\int d'R.$$

Для невозмущенного движения имеем

$$\frac{1}{2}\frac{d^2(r_0^2)}{dt^2} - k_1^2 r_0^{-1} = 2C.$$

Следовательно,

$$\frac{1}{2}\frac{d^2}{dt^2}(r^2 - r_0^2) - k_1^2(r^{-1} - r_0^{-1}) = \frac{\partial R}{\partial \rho} + 2\int d'R. \tag{5.3}$$

Равенства (5.1) и (5.2) дают

$$r^2 = \exp(2\rho_0 + 2\delta\rho) = r_0^2 \exp(2\delta\rho),$$

откуда

$$\frac{1}{2}(r^2 - r_0^2) = r_0^2\delta\rho + r_0^2(\delta\rho)^2 + \ldots$$

Аналогично,

$$r^{-1} - r_0^{-1} = -r_0^{-1}\delta\rho + \frac{1}{2}r_0^{-1}(\delta\rho)^2 + \ldots$$

Эти выражения подставим в уравнение (5.3), причем с левой стороны оставим лишь члены первого порядка, а члены второго порядка перенесем направо. Это даст

$$\frac{d^2(r_0\,\delta\rho)}{dt^2}+k_1^2 r_0^{-3}(r_0^2\,\delta\rho)=$$

$$=\frac{\partial R}{\partial\rho}+2\int d'R-\frac{d^2\left(r_0^2(\delta\rho)^2\right)}{dt^2}+\frac{k_1^2(\delta\rho)^2}{2r_0}+G_3, \quad (5.4)$$

где через G_3 обозначена совокупность членов не ниже третьего порядка.

Решение уравнения (5.4) выполняется приемами, указанными в § 3, и сравнительно просто дает в $\delta\rho$ возмущения как первого, так и второго порядка.

Обратимся теперь к уравнению (3.2), дающему

$$\frac{dw}{dt}=r^{-2}\left[C+\int\frac{\partial R}{\partial w}\,dt\right].$$

Так как для невозмущенного движения

$$\frac{dw_0}{dt}=r_0^{-2}a^2 n\cos\varphi,$$

то

$$C=a^2 n\cos\varphi.$$

Поэтому

$$\frac{d\,\delta w}{dt}=r^{-2}\int\frac{\partial R}{\partial w}\,dt+\left(r^{-2}-r_0^{-2}\right)a^2 n\cos\varphi,$$

а так как соотношения (5.1) и (5.2) дают

$$r^{-2}=r_0^{-2}\left[1-2\,\delta\rho+2\,(\delta\rho)^2-\ldots\right],$$

то окончательно получим

$$r_0^2\,\frac{d\,\delta w}{dt}=(1-2\,\delta\rho)\int\frac{\partial R}{\partial w}\,dt-2a^2 n\cos\varphi\left[\delta\rho-(\delta\rho)^2\right]+H_3, \quad (5.5)$$

где H_3 есть совокупность членов третьего и высших порядков.

Решение уравнения (5.5) выполняется таким же образом, как и уравнения Лапласа (4.1). Это последнее несколько более удобно, если ограничиваться нахождением возмущений первого порядка. Но если имеется в виду нахождение и возмущений второго порядка, то использование уравнения (5.5), данного Ньюкомом, оказывается более выгодным.

Чтобы получить эклиптические координаты планеты для момента t, Ньюком вычисляет для этого момента не только координаты r и w, но и элементы Ω и i, определяющие положение плоскости оскулирующей орбиты [Ньюком, 1874]. Нахождение Ω и i выполняется обычными методами (§ 1 гл. XVIII) с использованием рабочих формул, данных Леверрье [1855].

Метод Лапласа — Ньюкома был применен Ш. Г. Шараф и Н. А. Будниковой для построения теории движения Плутона [Шараф, 1955; Шараф и Будникова, 1964].