§ 6. Метод Лапласа—Андуайе

В своем «Курсе небесной механики» Андуайе изложил метод Лапласа, сделав в нем, как он сам отмечает, достаточно далеко идущие модификации [Андуайе, 1926, стр. 47—70]. Эти модификации, в основном являющиеся применением идей Ганзена, Гюльдена и Пуанкаре, довольно глубоко меняют не только форму, но и существо метода. Получившийся таким образом новый метод подробно развит автором и, несомненно, заслуживает применения на практике.

Ограничимся описанием основных идей метода, данного Андуайе.

В основу кладется неподвижная система координат $Sxyz$, причем за плоскость Sxy принимается оскулирующая плоскость в некоторый фиксированный момент t_0. В соответствующих этой системе цилиндрических координатах уравнения движения можно написать так (§ 1):

$$h=\rho^2\frac{dv}{dt};\quad \frac{d^2\rho}{dt^2}-\frac{h^2}{\rho^3}=T_1;\quad \frac{dh}{dt}=\rho T_2;\quad \frac{d^2z}{dt^2}=T_3, \tag{6.1}$$

где через T_1, T_2, T_3 обозначены компоненты силы, действующей на планету.

За исходное приближение Андуайе принимает не кеплерово движение планеты, а некоторое вспомогательное движение, определяемое тем условием, что проекция планеты на основную плоскость Sxy должна двигаться по законам Кеплера. Такое движение мы, очевидно, получим, если в уравнениях (6.1) положим

$$T_1=-k_0^2\rho^{-2};\quad T_2=0;\quad T_3=-k_0^2z\rho^{-3}, \tag{6.2}$$

т. е. если сила, действующая на планету, направлена в точку O, а ее интенсивность равна

$$k_0^2\rho^{-3}r=k_0^2\rho^{-3}(\rho^2+z^2)^{1/2}.$$

Постоянный коэффициент k_0^2 Андуайе определяет условием

$$k_0^2(1+\varkappa)=k_1^2;\quad k_1^2=k^2(1+m),$$

где k и m имеют обычные значения, а через $\varkappa$ обозначена величина порядка возмущающих сил, которая фиксируется в дальнейшем.

Так как мы рассматриваем случай, когда z имеет величину порядка возмущающих сил, то при всех этих условиях отклонение взятого нами вспомогательного исходного движения от кеплерова будет тоже первого порядка.

Для движения планеты, имеющего место в действительности, функция сил равна mU, где

$$U = k_0^2(1+\varkappa)(\rho^2+z^2)^{-1/2} + R,$$

причем через R обозначена, как обычно, пертурбационная функция. Поэтому для получения действительного движения планеты в уравнениях (6.1) надо взять

$$T_1 = \partial U/\partial\rho; \quad \rho T_2 = \partial U/\partial v; \quad T_3 = \partial U/\partial z. \tag{6.3}$$

Учитывая, что

$$(\rho^2+z^2)^{-1/2} = \rho^{-1} - \frac{1}{2}z^2\rho^{-3} + \frac{3}{8}z^4\rho^{-5} - \frac{5}{16}z^6\rho^{-7} + \ldots,$$

положим

$$U = k_0^2\left(\rho^{-1} - \frac{1}{2}z^2\rho^{-3}\right) + W,$$

где

$$W = R + k_0^2\varkappa\left(\rho^{-1} - \frac{1}{2}z^2\rho^{-3}\right) + k_0^2(1+\varkappa)\left(\frac{3}{8}z^4\rho^{-5} - \ldots\right). \tag{6.4}$$

Таким образом, величины (6.3) примут вид

$$T_1 = -k_0^2\rho^{-2} + \frac{3}{2}k_0^2z^2\rho^{-4} + \partial W/\partial\rho; \quad \rho T_2 = \partial W/\partial v;$$

$$T_3 = -k_0^2 z\rho^{-3} + \partial W/\partial z.$$

Они отличаются от (6.2), соответствующих промежуточной орбите, на величины порядка возмущающих сил.

Подстановка этих выражений в уравнения (6.1) позволяет написать эти уравнения следующим образом:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial W}{\partial\rho} &= \frac{d^2\rho}{dt^2} + \frac{k_0^2}{\rho^2} - \frac{3}{2}\frac{k_0^2z^2}{\rho^4} - \frac{h^2}{\rho^3}; \quad \frac{dW}{dv} = \frac{dh}{dt}, \\ \frac{\partial W}{\partial z} &= \frac{d^2z}{dt^2} + \frac{k_0^2z}{\rho^3}. \end{aligned}\right\} \tag{6.5}$$

Положим

$$W' = \int\left(\frac{\partial W}{\partial\rho}\frac{d\rho}{dt} + \frac{\partial W}{\partial v}\frac{dv}{dt} + \frac{\partial W}{\partial z}\frac{dz}{dt}\right)dt$$

и выполним указанное здесь интегрирование. Легко убедиться, что

$$2W' = \left(\frac{d\rho}{dt}\right)^2 - 2k_0^2\rho^{-1} + k_0^2z^2\rho^{-3} + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2 + h^2\rho^{-2}.$$

А так как

$$\rho\frac{\partial W}{\partial\rho} = \rho\frac{d^2\rho}{dt^2} + k_0^2\rho^{-1} - \frac{3}{2}k_0^2z^2\rho^{-3} - h^2\rho^{-2}, \tag{6.6}$$

то, положив для краткости

$$P = \rho\frac{\partial W}{\partial\rho} + 2W' + \frac{1}{2}k_0^2 z^2\rho^{-3} - \left(\frac{dz}{dt}\right)^2,$$

будем иметь для нахождения ρ такое уравнение:

$$\frac{d^2(\rho^2)}{dt^2} - 2k_0^2\rho^{-1} = P. \tag{6.7}$$

Присоединив к нему (6.6) и два последних из уравнений (6.5), т. е.

$$\frac{dv}{dt} = h\rho^{-2}; \qquad \frac{d^2 z}{dt^2} + k_0^2 z\rho^{-3} = \frac{\partial W}{\partial z}, \tag{6.8}$$

где

$$h^2 = \rho^3\left(\frac{d^2\rho}{dt^2} + k_0^2\rho^{-2} - \frac{3}{2}k_0^2 z^2\rho^{-4} - \frac{\partial W}{\partial\rho}\right), \tag{6.9}$$

получим для нахождения ρ, v и z систему пятого порядка. Шестая произвольная постоянная, необходимая для получения общего решения, уже содержится в W'.

Мы не будем входить во все подробности способа, развитого Андуайе для решения системы уравнений (6.7) и (6.8). Ограничимся лишь указанием замены переменных, делаемой им в этих уравнениях.

Учитывая, что невозмущенное движение проекции планеты на плоскость Sxy происходит по законам Кеплера, Андуайе вводит вместо ρ две новые переменные $\varepsilon = \sin\varphi$ и g, такие, что ρ и $\dot\rho$ выражаются через эти переменные по формулам кеплерова движения, в котором большая полуось a имеет постоянное значение.

Обозначим через n другую постоянную, определяемую равенством $n^2a^3 = k_0^2$. В кеплеровом движении

$$\dot\rho = \frac{\partial\rho}{\partial g}n,$$

вследствие чего равенство

$$\dot\rho = \frac{\partial\rho}{\partial g}\frac{dg}{dt} + \frac{\partial\rho}{\partial\varepsilon}\frac{d\varepsilon}{dt}$$

можно написать так:

$$\frac{\partial\rho}{\partial g}\left(\frac{dg}{dt} - n\right) + \frac{\partial\rho}{\partial\varepsilon}\frac{d\varepsilon}{dt} = 0. \tag{6.10}$$

Обратимся теперь к уравнению (6.7), которое можно представить в форме

$$\frac{d\dot\rho}{dt} + \dot\rho^2\rho^{-1} - k_0^2\rho^{-2} = P\rho^{-1},$$

или

$$\frac{\partial\dot\rho}{\partial g}\frac{dg}{dt} + \frac{\partial\dot\rho}{\partial\varepsilon}\frac{d\varepsilon}{dt} + \dot\rho^2\rho^{-1} - k_0^2\rho^{-2} = P\rho^{-1}.$$

Для невозмущенного движения это равенство имеет вид

$$\frac{\partial\dot{\rho}}{\partial g} n + \dot{\rho}^2\rho^{-1} - k_0^2\rho^{-2} = P_0\rho^{-1},$$

где P_0 — постоянная величина, не зависящая от g и ε.

Почленное вычитание двух последних равенств дает

$$\frac{\partial\dot{\rho}}{\partial g}\left(\frac{dg}{dt} - n\right) + \frac{\partial\dot{\rho}}{\partial\varepsilon}\frac{d\varepsilon}{dt} = P\rho^{-1}, \tag{6.11}$$

поскольку постоянную P_0 можно считать присоединенной к той постоянной, которая уже фигурирует в W'.

Чтобы разрешить уравнения (6.10) и (6.11) относительно $dg/dt - n$ и $d\varepsilon/dt$, вычислим сначала определитель этой системы. Обозначив через w и u истинную и эксцентрическую аномалии, соответствующие g и ε, будем иметь

$$\frac{\partial\rho}{\partial g} = a\,\mathrm{tg}\,\varphi\sin w = \frac{a^2}{\rho}\varepsilon\sin u; \qquad \frac{\partial\dot{\rho}}{\partial g} = \frac{na^3}{\rho^2}\varepsilon\cos w;$$

$$\frac{\partial\rho}{\partial\varepsilon} = -a\cos w = \frac{a^2}{\rho}(\varepsilon - \cos u); \quad \frac{\partial\dot{\rho}}{\partial\varepsilon} = \frac{na^3}{\rho^2}\cos\varphi\sin w.$$

Таким образом,

$$\frac{\partial\rho}{\partial g}\frac{\partial\dot{\rho}}{\partial\varepsilon} - \frac{\partial\rho}{\partial\varepsilon}\frac{\partial\dot{\rho}}{\partial g} = \frac{na^4\varepsilon}{\rho^2},$$

а потому

$$\frac{dg}{dt} - n = \frac{P}{na^2\varepsilon}(\cos u - \varepsilon); \quad \frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{P}{na^2}\sin u. \tag{6.12}$$

Эти уравнения Андуайе подвергает дальнейшему преобразованию, вводя вместо g и ε новые неизвестные, x_1 и x_2, определяемые соотношениями

$$x_1 = \frac{1}{2}\varepsilon\exp(ig); \quad x_2 = \frac{1}{2}\varepsilon\exp(-ig) \quad (i = \sqrt{-1}).$$

Легко видеть, что радиус-вектор и уравнение центра выражаются через новые неизвестные следующим образом:

$$\ln r = \ln a - (x_1 + x_2) - \frac{3}{2}(x_1^2 + x_2^2) + x_1x_2 - \\ - \frac{17}{6}(x_1^3 + x_2^3) + \frac{3}{2}(x_1^2x_2 + x_1x_2^2) + \ldots, \tag{6.13}$$

$$i(w - g) = 2(x_1 - x_2) + \frac{5}{2}(x_1^2 - x_2^2) + \\ + \frac{13}{3}(x_1^3 - x_2^3) - (x_1^2x_2 - x_1x_2^2) + \ldots \tag{6.14}$$

Уравнения (6.12) могут быть заменены такими:

$$\frac{d\left(x^{-1}x_1\right)}{dt}=\frac{iz_2P}{2na^2};\quad \frac{d\left(xx_2\right)}{dt}=\frac{-iz_1P}{2na^2}, \tag{6.15}$$

где

$$x=\exp i\left(nt+g_0\right),$$

$$z_1=x\left[\exp i\left(u-g\right)-2x_2\right];\quad z_2=x^{-1}\left[\exp\left[-i\left(u-g\right)\right]-2x_1\right],$$

откуда

$$z_1=x\left(1+x_1-3x_2+\frac{3}{2}x_1^2-x_1x_2-\frac{1}{2}x_2^2+\ldots\right),$$

$$z_2=x^{-1}\left(1-3x_1+x_2-\frac{1}{2}x_1^2-x_1x_2+\frac{3}{2}x_2^2-\ldots\right).$$

Вместо долготы v Андуайе вводит в качестве неизвестной соответствующую среднюю долготу λ. Так как

$$v=\lambda+\left(w-g\right),$$

то соотношения (6.8), (6.9) и разложение (6.14) приводят к уравнению вида

$$\frac{d\lambda}{dt}=n+S-\frac{1}{na^2}CP, \tag{6.16}$$

где

$$C=2+\frac{1}{2}\left(x_1+x_2\right)+\frac{1}{2}\left(x_1^2+x_2^2\right)+x_1x_2+\ldots,$$

а S дается равенством

$$h=h_1+\rho^2S,$$

причем

$$h_1=na^2\cos\varphi=na^2\left(1-4x_1x_2\right)^{1/2}.$$

В заключение Андуайе подробно рассматривает вопрос о разложении пертурбационной функции R и выражения (6.4) в форме, наиболее удобной для решения уравнений (6.15), (6.16) и второго из уравнений (6.8).

§ 7. Уравнения возмущенного движения в ганзеновских координатах

В неподвижной гелиоцентрической системе координат $Sxyz$ уравнения возмущенного движения планеты P с массой m имеют вид (§ 3 гл. XVI)

$$\left.\begin{aligned}\ddot{x}+k_1^2xr^{-3}&=F_x,\\ \ddot{y}+k_1^2yr^{-3}&=F_y,\\ \ddot{z}+k_1^2zr^{-3}&=F_z,\end{aligned}\right\} \tag{7.1}$$