Уравнения (6.12) могут быть заменены такими:

$$\frac{d(x^{-1}x_1)}{dt}=\frac{iz_2P}{2na^2};\quad \frac{d(xx_2)}{dt}=\frac{-iz_1P}{2na^2}, \tag{6.15}$$

где

$$x=\exp i(nt+g_0),$$

$$z_1=x[\exp i(u-g)-2x_2];\quad z_2=x^{-1}[\exp[-i(u-g)]-2x_1],$$

откуда

$$z_1=x\left(1+x_1-3x_2+\frac{3}{2}x_1^2-x_1x_2-\frac{1}{2}x_2^2+\ldots\right),$$

$$z_2=x^{-1}\left(1-3x_1+x_2-\frac{1}{2}x_1^2-x_1x_2+\frac{3}{2}x_2^2-\ldots\right).$$

Вместо долготы $v$ Андуайе вводит в качестве неизвестной соответствующую среднюю долготу $\lambda$. Так как

$$v=\lambda+(w-g),$$

то соотношения (6.8), (6.9) и разложение (6.14) приводят к уравнению вида

$$\frac{d\lambda}{dt}=n+S-\frac{1}{na^2}CP, \tag{6.16}$$

где

$$C=2+\frac{1}{2}(x_1+x_2)+\frac{1}{2}(x_1^2+x_2^2)+x_1x_2+\ldots,$$

а $S$ дается равенством

$$h=h_1+\rho^2 S,$$

причем

$$h_1=na^2\cos\varphi=na^2(1-4x_1x_2)^{1/2}.$$

В заключение Андуайе подробно рассматривает вопрос о разложении пертурбационной функции $R$ и выражения (6.4) в форме, наиболее удобной для решения уравнений (6.15), (6.16) и второго из уравнений (6.8).

## § 7. Уравнения возмущенного движения в ганзеновских координатах

В неподвижной гелиоцентрической системе координат $Sxyz$ уравнения возмущенного движения планеты $P$ с массой $m$ имеют вид (§ 3 гл. XVI)

$$\left.\begin{aligned}\ddot{x}+k_1^2xr^{-3}&=F_x,\\ \ddot{y}+k_1^2yr^{-3}&=F_y,\\ \ddot{z}+k_1^2zr^{-3}&=F_z,\end{aligned}\right\} \tag{7.1}$$

где $k_1^2 = k^2(1+m)$, а через $(mF_x, mF_y, mF_z)$ обозначена возмущающая сила.

Координаты $x$, $y$, $z$ и их производные $\dot{x}$, $\dot{y}$, $\dot{z}$ выражаются через оскулирующие элементы и время теми же самыми формулами, которые имеют место для невозмущенного движения, когда возмущающая сила равна нулю. Это свойство, присущее неподвижным координатам, может иметь место и для подвижных координатных систем, если их подчинить надлежащим условиям.

Пусть $X$, $Y$, $Z$ — координаты планеты в подвижной гелиоцентрической системе, определяемой соотношениями

$$\left.\begin{aligned} X &= \alpha x + \alpha_1 y + \alpha_2 z, \\ Y &= \beta x + \beta_1 y + \beta_2 z, \\ Z &= \gamma x + \gamma_1 y + \gamma_2 z, \end{aligned}\right\} \tag{7.2}$$

или эквивалентными им

$$\left.\begin{aligned} x &= \alpha X + \beta Y + \gamma Z, \\ y &= \alpha_1 X + \beta_1 Y + \gamma_1 Z, \\ z &= \alpha_2 X + \beta_2 Y + \gamma_2 Z. \end{aligned}\right\} \tag{7.3}$$

Если на девять угловых коэффициентов $\alpha$, $\alpha_1$, ..., $\gamma_2$, уже связанных шестью условиями ортогональности,

$$\left.\begin{aligned} \alpha^2 + \alpha_1^2 + \alpha_2^2 = 1; \quad & \beta\gamma + \beta_1\gamma_1 + \beta_2\gamma_2 = 0, \\ \beta^2 + \beta_1^2 + \beta_2^2 = 1; \quad & \gamma\alpha + \gamma_1\alpha_1 + \gamma_2\alpha_2 = 0, \\ \gamma^2 + \gamma_1^2 + \gamma_2^2 = 1; \quad & \alpha\beta + \alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 = 0, \end{aligned}\right\} \tag{7.4}$$

наложить еще дополнительные условия:

$$\left.\begin{aligned} x\dot{\alpha} + y\dot{\alpha}_1 + z\dot{\alpha}_2 &= 0, \\ x\dot{\beta} + y\dot{\beta}_1 + z\dot{\beta}_2 &= 0, \\ x\dot{\gamma} + y\dot{\gamma}_1 + z\dot{\gamma}_2 &= 0, \end{aligned}\right\} \tag{7.5}$$

то производные новых координат будут даваться формулами

$$\begin{aligned} \dot{X} &= \alpha\dot{x} + \alpha_1\dot{y} + \alpha_2\dot{z}, \\ \dot{Y} &= \beta\dot{x} + \beta_1\dot{y} + \beta_2\dot{z}, \\ \dot{Z} &= \gamma\dot{x} + \gamma_1\dot{y} + \gamma_2\dot{z}. \end{aligned}$$

В этом и только в этом случае новые координаты и их производные будут, очевидно, выражаться через оскулирующие элементы по формулам невозмущенного движения. Координатные системы, обладающие этим свойством, Ганзен предложил называть *идеальными*.

Покажем, что равенства (7.5) накладывают только два условия на угловые коэффициенты подвижной системы. В самом деле, подстановка выражений (7.3) в равенства (7.5) дает

$$X/A = Y/B = Z/C, \tag{7.6}$$

где

$$A = \gamma\dot{\beta} + \gamma_1\dot{\beta}_1 + \gamma_2\dot{\beta}_2 = -\beta\dot{\gamma} - \beta_1\dot{\gamma}_1 - \beta_2\dot{\gamma}_2,$$
$$B = \alpha\dot{\gamma} + \alpha_1\dot{\gamma}_1 + \alpha_2\dot{\gamma}_2 = -\gamma\dot{\alpha} - \gamma_1\dot{\alpha}_1 - \gamma_2\dot{\alpha}_2,$$
$$C = \beta\dot{\alpha} + \beta_1\dot{\alpha}_1 + \beta_2\dot{\alpha}_2 = -\alpha\dot{\beta} - \alpha_1\dot{\beta}_1 - \alpha_2\dot{\beta}_2.$$

Соотношения (7.6) показывают, что мгновенная ось вращения триэдра $SXYZ$, дающего идеальную систему координат, совпадает с прямой $SP$.

Девять угловых коэффициентов, определяющих идеальную систему, связаны, помимо шести условий ортогональности, еще двумя условиями (7.6). Остающимся произволом в выборе этих коэффициентов Ганзен воспользовался, чтобы подчинить их еще условию

$$\gamma x + \gamma_1 y + \gamma_2 z = 0. \tag{7.7}$$

Таким образом, он получил идеальную систему, в которой всегда $Z=0$, а потому радиус-вектор планеты находится в плоскости $SXY$. Эту систему координат будем называть **ганзеновской**.

Соотношения (7.6) показывают, что для ганзеновской системы $C=0$; иначе говоря, имеет место первое из равенств:

$$\beta\dot{\alpha} + \beta_1\dot{\alpha}_1 + \beta_2\dot{\alpha}_2 = 0; \quad \alpha\dot{\alpha} + \alpha_1\dot{\alpha}_1 + \alpha_2\dot{\alpha}_2 = 0, \tag{7.8}$$

тогда как второе вытекает из соотношений (7.4). Эти же соотношения дают:

$$\beta\gamma + \beta_1\gamma_1 + \beta_2\gamma_2 = 0; \quad \alpha\gamma + \alpha_1\gamma_1 + \alpha_2\gamma_2 = 0. \tag{7.9}$$

Сопоставление равенств (7.8) и (7.9) показывает, что

$$\dot{\alpha}/\gamma = \dot{\alpha}_1/\gamma_1 = \dot{\alpha}_2/\gamma_2. \tag{7.10}$$

Точно так же, записав условие $C=0$ в форме

$$\alpha\dot{\beta} + \alpha_1\dot{\beta}_1 + \alpha_2\dot{\beta}_2 = 0,$$

получим

$$\dot{\beta}/\gamma = \dot{\beta}_1/\gamma_1 = \dot{\beta}_2/\gamma_2. \tag{7.11}$$

Чтобы получить уравнения движения в ганзеновских координатах, продифференцируем равенства (7.3), в которых теперь $Z=0$. Это даст

$$\dot{x} = \alpha\dot{X} + \beta\dot{Y}; \quad \dot{y} = \alpha_1\dot{X} + \beta_1\dot{Y}; \quad \dot{z} = \alpha_2\dot{X} + \beta_2\dot{Y}. \tag{7.12}$$

так как

$$X\dot{\alpha}+Y\dot{\beta}=0; \quad X\dot{\alpha}_1+Y\dot{\beta}_1=0; \quad X\dot{\alpha}_2+Y\dot{\beta}_2=0, \tag{7.13}$$

в чем легко убедиться непосредственной проверкой.

Дифференцирование равенств (7.12) дает

$$\ddot{x}=\alpha\ddot{X}+\beta\ddot{Y}+\dot{\alpha}\dot{X}+\dot{\beta}\dot{Y},$$
$$\ddot{y}=\alpha_1\ddot{X}+\beta_1\ddot{Y}+\dot{\alpha}_1\dot{X}+\dot{\beta}_1\dot{Y},$$
$$\ddot{z}=\alpha_2\ddot{X}+\beta_2\ddot{Y}+\dot{\alpha}_2\dot{X}+\dot{\beta}_2\dot{Y}.$$

Умножим эти равенства сначала на $\alpha$, $\alpha_1$, $\alpha_2$ и сложим почленно, потом — на $\beta$, $\beta_1$, $\beta_2$ и опять сложим; наконец, на $\gamma$, $\gamma_1$, $\gamma_2$ и снова сложим.

Учитывая (7.10) и (7.11), получим:

$$\left.\begin{aligned}\alpha\ddot{x}+\alpha_1\ddot{y}+\alpha_2\ddot{z}=\ddot{X},\\ \beta\ddot{x}+\beta_1\ddot{y}+\beta_2\ddot{z}=\ddot{Y},\end{aligned}\right\} \tag{7.14}$$

$$\gamma\ddot{x}+\gamma_1\ddot{y}+\gamma_2\ddot{z}=(\gamma\dot{\alpha}+\ \ldots)\dot{X}+(\gamma\dot{\beta}+\ \ldots)\dot{Y}=$$
$$=\gamma_2^{-1}(\dot{\alpha}_2\dot{X}+\dot{\beta}_2\dot{Y}). \tag{7.15}$$

Очевидные комбинации уравнений движения (7.1) на основании (7.14) и (7.2) дают

$$\ddot{X}+k_1^2Xr^{-3}=F_X; \quad \ddot{Y}+k_1^2Yr^{-3}=F_Y, \tag{7.16}$$

$$\dot{\alpha}_2\dot{X}+\dot{\beta}_2\dot{Y}=\gamma_2F_Z. \tag{7.17}$$

Уравнение (7.17) и последнее из равенств (7.13) могут быть заменены такими:

$$\dot{\alpha}_2=-\gamma_2H^{-1}YF_Z; \quad \dot{\beta}_2=+\gamma_2H^{-1}XF_Z, \tag{7.18}$$

где

$$H=X\dot{Y}-Y\dot{X}. \tag{7.19}$$

Уравнения (7.16) и (7.18) позволяют найти $X$, $Y$, $\alpha_2$, $\beta_2$, так как

$$\gamma_2=(1-\alpha_2^2-\beta_2^2)^{1/2}.$$

После этого из соотношений (7.4), уже чисто алгебраически, могут быть получены $\alpha$, $\beta$, $\alpha_1$, $\beta_1$. Этим заканчивается, как показывают формулы (7.3), переход от ганзеновских координат $X$, $Y$, $Z=0$ к координатам $x$, $y$, $z$.

Так как $Z=0$, то плоскость $Z=0$ ганзеновской системы координат совпадает с плоскостью оскулирующей орбиты.

Перейдем к полярным координатам в плоскости оскулирующей орбиты, положив

$$X=r\cos w; \quad Y=r\sin w. \tag{7.20}$$

Подстановка этих выражений в уравнения (7.16) приводит к уравнениям

$$\ddot{r} - r\dot{w}^2 + k_1^2 r^{-2} = S; \quad \frac{d}{dt}(r^2\dot{w}) = rT, \tag{7.21}$$

где

$$S = F_X \cos w + F_Y \sin w; \quad T = -F_X \sin w + F_Y \cos w$$

представляют проекции возмущающего ускорения на радиус-вектор и на перпендикуляр к нему, лежащий в плоскости $SXY$.

Выражение (7.19) принимает вид

$$H = r^2\dot{w}. \tag{7.22}$$

В том случае, когда существует пертурбационная функция $R$, так что

$$F_X = \partial R/\partial X; \quad F_Y = \partial R/\partial Y; \quad F_Z = \partial R/\partial Z, \tag{7.23}$$

уравнениям (7.21) можно придать вид

$$\ddot{r} - r\dot{w}^2 + k_1^2 r^{-2} = \frac{\partial R}{\partial r}; \quad \frac{d}{dt}(r^2\dot{w}) = \frac{\partial R}{\partial w}. \tag{7.24}$$

Эти уравнения совпадают с уравнениями (3.1), (3.2), на которых базируется метод Лапласа. Изложенный нами вывод этих уравнений, данный Ганзеном, показывает, что уравнения (7.24) совершенно точны, если долгота $w$ отсчитывается от оси $SX$ ганзеновской системы координат.

## § 8. Переход от ганзеновских координат к исходным

Угловые коэффициенты $\alpha$, $\beta$, ..., $\gamma_2$, фигурирующие в формулах (7.3), могут быть выражены через три угла $i$, $\Omega$ и $\sigma$. Через $i$ здесь обозначен угол между осями $SZ$ и $Sz$; через $\Omega$ — угол между $Sx$ и положительным направлением линии узлов орбиты на плоскости $Sxy$; через $\sigma$ — угол между $SX$ и этим направлением.

Легко видеть, что

$$\left.\begin{aligned}
\alpha &= \cos\sigma\cos\Omega + \sin\sigma\sin\Omega\cos i,\\
\beta &= \sin\sigma\cos\Omega - \cos\sigma\sin\Omega\cos i,\\
\gamma &= \sin\Omega\sin i,\\
\alpha_1 &= \cos\sigma\sin\Omega - \sin\sigma\cos\Omega\cos i,\\
\beta_1 &= \sin\sigma\sin\Omega + \cos\sigma\cos\Omega\cos i,\\
\gamma_1 &= -\cos\Omega\sin i,\\
\alpha_2 &= -\sin\sigma\sin i,\\
\beta_2 &= \cos\sigma\sin i,\\
\gamma_2 &= \cos i.
\end{aligned}\right\} \tag{8.1}$$