Подстановка этих выражений в уравнения (7.16) приводит к уравнениям

$$\ddot{r} - r\dot{w}^2 + k_1^2 r^{-2} = S; \quad \frac{d}{dt}(r^2\dot{w}) = rT, \tag{7.21}$$

где

$$S = F_X \cos w + F_Y \sin w; \quad T = -F_X \sin w + F_Y \cos w$$

представляют проекции возмущающего ускорения на радиус-вектор и на перпендикуляр к нему, лежащий в плоскости SXY.

Выражение (7.19) принимает вид

$$H = r^2\dot{w}. \tag{7.22}$$

В том случае, когда существует пертурбационная функция R, так что

$$F_X = \partial R/\partial X; \quad F_Y = \partial R/\partial Y; \quad F_Z = \partial R/\partial Z, \tag{7.23}$$

уравнениям (7.21) можно придать вид

$$\ddot{r} - r\dot{w}^2 + k_1^2 r^{-2} = \frac{\partial R}{\partial r}; \quad \frac{d}{dt}(r^2\dot{w}) = \frac{\partial R}{\partial w}. \tag{7.24}$$

Эти уравнения совпадают с уравнениями (3.1), (3.2), на которых базируется метод Лапласа. Изложенный нами вывод этих уравнений, данный Ганзеном, показывает, что уравнения (7.24) совершенно точны, если долгота w отсчитывается от оси SX ганзеновской системы координат.

§ 8. Переход от ганзеновских координат к исходным

Угловые коэффициенты $\alpha, \beta, \ldots, \gamma_2$, фигурирующие в формулах (7.3), могут быть выражены через три угла i, Ω и σ. Через i здесь обозначен угол между осями SZ и Sz; через Ω — угол между Sx и положительным направлением линии узлов орбиты на плоскости Sxy; через σ — угол между SX и этим направлением.

Легко видеть, что

$$\left.\begin{aligned}
\alpha &= \cos\sigma\cos\Omega + \sin\sigma\sin\Omega\cos i,\\
\beta &= \sin\sigma\cos\Omega - \cos\sigma\sin\Omega\cos i,\\
\gamma &= \sin\Omega\sin i,\\
\alpha_1 &= \cos\sigma\sin\Omega - \sin\sigma\cos\Omega\cos i,\\
\beta_1 &= \sin\sigma\sin\Omega + \cos\sigma\cos\Omega\cos i,\\
\gamma_1 &= -\cos\Omega\sin i,\\
\alpha_2 &= -\sin\sigma\sin i,\\
\beta_2 &= \cos\sigma\sin i,\\
\gamma_2 &= \cos i.
\end{aligned}\right\} \tag{8.1}$$

Для случая ганзеновской системы координат $SXYZ$ на основании (7.8) имеем

$$\beta\, d\alpha+\beta_1\, d\alpha_1+\beta_2\, d\alpha_2=0.$$

Подставив сюда выражения (8.1), дающие

$$d\alpha=-\alpha_1\, d\Omega-\beta\, d\sigma-\gamma \sin\sigma\, di,$$
$$d\alpha_1=+\alpha\, d\Omega-\beta_1\, d\sigma-\gamma_1 \sin\sigma\, di,$$
$$d\alpha_2=-\beta_2\, d\sigma-\gamma_2 \sin\sigma\, di,$$

получим

$$d\sigma=\cos i\, d\Omega. \tag{8.2}$$

С другой стороны, если в уравнения (7.18) подставить выражения (8.1) и учесть (7.23), то будем иметь

$$\frac{di}{dt}=H^{-1}r\cos(w-\sigma)\frac{\partial R}{\partial Z}, \tag{8.3}$$

$$\operatorname{tg} i\,\frac{d\sigma}{dt}=H^{-1}r\sin(w-\sigma)\frac{\partial R}{\partial Z}. \tag{8.4}$$

Соотношения (8.2) и (8.4) дают

$$\sin i\,\frac{d\Omega}{dt}=H^{-1}r\sin(w-\sigma)\frac{\partial R}{\partial Z}. \tag{8.5}$$

Уравнения (8.3) и (8.5) уже были нами выведены методом вариации произвольных постоянных (§ 6 гл. XVI).

После того как решение уравнений (7.24), (8.3), (8.4) и (8.5) даст величины r, w, i, Ω и σ для вычисления гелиоцентрических сферических координат l и b, определяемых равенствами

$$x=r\cos b\cos l;\quad y=r\cos b\sin l;\quad z=r\sin b,$$

могут служить формулы

$$\left.\begin{aligned}\cos b\sin(l-\Omega)&=\cos i\sin(w-\sigma),\\ \cos b\cos(l-\Omega)&=\cos(w-\sigma),\\ \sin b&=\sin i\sin(w-\sigma).\end{aligned}\right\} \tag{8.6}$$

Чтобы их получить, достаточно к прямоугольному сферическому треугольнику, образованному на гелиоцентрической небесной сфере плоскостью xy, орбитой планеты и кругом широт, применить основные формулы сферической тригонометрии.

Формулы (8.6) достаточно удобны только в том случае, когда нужно вычислить лишь небольшое число положений планеты. Поэтому до самого последнего времени создание аналитической теории движения планеты всегда завершалось построением таблиц, по возможности облегчающих вычисление ее координат для целей получения эфемерид. Только электронные вычислительные машины сделали во многих случаях более целесообразным получение эфемериды непосредственно по формулам аналитической теории, минуя составление таблиц.

Непосредственное табулирование b и $l-\Omega$ по аргументам i и $w-\sigma$ на основании формул (8.6) привело бы к построению слишком больших и неудобных таблиц с двумя входами. Чтобы избежать этого, Ганзен предложил заменить формулы (8.6) такими:

$$\left.\begin{aligned} \cos b\sin(l-\Omega_0-\Gamma) &= \cos i_0\sin(w-\Omega_0)-\psi,\\ \cos b\cos(l-\Omega_0-\Gamma) &= \cos(w-\Omega_0)+\psi',\\ \sin b &= \sin i_0\sin(w-\Omega_0)+s, \end{aligned}\right\} \qquad (8.7)$$

где i_0 и Ω_0 — значения элементов, соответствующие начальному моменту $t=0$, а за начальное значение σ (которым мы можем распорядиться по своему усмотрению) принято

$$\sigma_0=\Omega_0. \qquad (8.8)$$

Первые члены правых частей формул (8.7) удобно табулируются по аргументу $w-\Omega_0$. Что же касается малых величин ψ, ψ' и s, то для их вычисления Ганзен дал удобные формулы, которые мы приведем здесь без вывода.

После того как найдены w и r, а следовательно, и H, вычисляем

$$\left.\begin{aligned} L &= \int_0^t H^{-1}r\cos i\sin(w-\Omega_0)\frac{\partial R}{\partial Z}\,dt,\\ M &= \int_0^t H^{-1}r\cos i\cos(w-\Omega_0)\frac{\partial R}{\partial Z}\,dt. \end{aligned}\right\} \qquad (8.9)$$

Учитывая малость $\partial R/\partial Z$ и достаточность нахождения L и M с небольшим числом знаков, в этих формулах можно пользоваться приближенными значениями i.

Решение уравнений

$$\left.\begin{aligned} \sin i\sin(\sigma-\Omega_0) &= L,\\ \sin i\cos(\sigma-\Omega_0) &= M+\sin i_0 \end{aligned}\right\} \qquad (8.10)$$

даст значения σ и i. Значения i могут служить для контроля.

Далее находим:

$$s=M\sin(w-\Omega_0)-L\cos(w-\Omega_0),$$

$$\varkappa=\cos i_0(\cos i_0+\cos i)-M\sin i,$$

$$\psi=s\varkappa^{-1}[\sin i_0\cos i+\cos i_0\sin i\cos(\sigma-\Omega_0)],$$

$$\psi'=s\varkappa^{-1}\sin i\sin(\sigma-\Omega_0),$$

после чего формула

$$\Gamma = \int_0^t s\varkappa^{-1}H^{-1}r\frac{\partial R}{\partial Z}\,dt$$

даст Г.

Если пренебречь возмущениями второго и высших порядков, то

$$\Gamma = 0; \quad \psi = s \operatorname{tg} i_0; \quad \psi' = 0,$$

ибо, как показывают равенства (8.8) и (8.10), величины L и M, а потому и s — первого порядка относительно возмущающего ускорения.

§ 9. Метод Ганзена. Радиус-вектор и долгота в орбите

Создавая свой метод, Ганзен стремился избавиться от недостатков, присущих методу Лапласа в его первоначальном виде [Лаплас, 1799]. Мы уже видели (§ 7), что Ганзен дал безукоризненно строгий вывод основных уравнений возмущенного движения в плоскости оскулирующей орбиты. Далее он дал вполне строгие и удобные формулы для перехода от координат в плоскости оскулирующей орбиты к эклиптическим координатам. Еще более глубокие улучшения были им внесены в методику получения координат r и w, определяющих положение планеты в плоскости оскулирующей орбиты.

Лаплас употреблял указанные в §§ 3 и 4 формулы лишь для нахождения короткопериодических членов в $\delta_1 r$ и $\delta_1 w$. Что же касается членов долгопериодических, то он предпочел учитывать их путем соответствующего изменения средней аномалии планеты. В формулах

$$w = w_0 + \delta_1 w; \qquad r = r_0 + \delta_1 r$$

он находил значения w_0, r_0 при помощи средней аномалии, уже включающей долгопериодические члены среднего движения. Такой прием вполне оправдал себя на практике и широко использовался в дальнейшем при построении аналитических теорий движения планет (§ 3 гл. XVIII). Однако сделанная Лапласом попытка обосновать его законность [Лаплас, 1799; стр. 292] не может считаться доказательством. Вопрос о возможном влиянии такого учета долгопериодических возмущений на короткопериодические остался открытым, не говоря уже о неопределенности границы, разделяющей эти два класса возмущений.

В методе Ганзена все без исключения возмущения истинной долготы w переносятся в среднюю аномалию планеты. Этим достигается безупречная строгость метода. С другой стороны, пре-