после чего формула

$$\Gamma = \int_0^t s\varkappa^{-1}H^{-1}r\frac{\partial R}{\partial Z}\,dt$$

даст Г.

Если пренебречь возмущениями второго и высших порядков, то

$$\Gamma = 0; \quad \psi = s\operatorname{tg} i_0; \quad \psi' = 0,$$

ибо, как показывают равенства (8.8) и (8.10), величины L и M, а потому и s — первого порядка относительно возмущающего ускорения.

§ 9. Метод Ганзена. Радиус-вектор и долгота в орбите

Создавая свой метод, Ганзен стремился избавиться от недостатков, присущих методу Лапласа в его первоначальном виде [Лаплас, 1799]. Мы уже видели (§ 7), что Ганзен дал безукоризненно строгий вывод основных уравнений возмущенного движения в плоскости оскулирующей орбиты. Далее он дал вполне строгие и удобные формулы для перехода от координат в плоскости оскулирующей орбиты к эклиптическим координатам. Еще более глубокие улучшения были им внесены в методику получения координат r и w, определяющих положение планеты в плоскости оскулирующей орбиты.

Лаплас употреблял указанные в §§ 3 и 4 формулы лишь для нахождения короткопериодических членов в $\delta_1 r$ и $\delta_1 w$. Что же касается членов долгопериодических, то он предпочел учитывать их путем соответствующего изменения средней аномалии планеты. В формулах

$$w = w_0 + \delta_1 w; \qquad r = r_0 + \delta_1 r$$

он находил значения w_0, r_0 при помощи средней аномалии, уже включающей долгопериодические члены среднего движения. Такой прием вполне оправдал себя на практике и широко использовался в дальнейшем при построении аналитических теорий движения планет (§ 3 гл. XVIII). Однако сделанная Лапласом попытка обосновать его законность [Лаплас, 1799; стр. 292] не может считаться доказательством. Вопрос о возможном влиянии такого учета долгопериодических возмущений на короткопериодические остался открытым, не говоря уже о неопределенности границы, разделяющей эти два класса возмущений.

В методе Ганзена все без исключения возмущения истинной долготы w переносятся в среднюю аномалию планеты. Этим достигается безупречная строгость метода. С другой стороны, преимущества, даваемые приемом Лапласа (уменьшение амплитуды), распространяются и на возмущения с короткими периодами.

Для достижения указанной цели Ганзен вводит в рассмотрение вспомогательную эллиптическую орбиту, лежащую в плоскости оскулирующей орбиты планеты и имеющую постоянные элементы a_0, e_0 и

$$n_0 = k_1 a_0^{-3/2}; \quad k_1^2 = k^2(1+m),$$

равные значениям оскулирующих элементов в начальный момент $t=0$. Через $n_0 z$ он обозначает среднюю аномалию в этой вспомогательной орбите.

Формулы эллиптического движения

$$\left.\begin{aligned} n_0 z = E_0 - e_0 \sin E_0; \quad p_0 = a_0(1-e_0^2),\\ r_0 \sin f_0 = a_0\sqrt{1-e_0^2}\sin E_0,\\ r_0 \cos f_0 = a_0(\cos E_0 - e_0),\\ r_0 = a_0(1-e_0\cos E_0) = p_0(1+e_0\cos f_0)^{-1} \end{aligned}\right\} \tag{9.1}$$

позволяют найти значения r_0 и f_0, соответствующие любому значению z.

Величину z Ганзен рассматривает как функцию t, определяемую условием

$$w = f_0 + \pi_0, \tag{9.2}$$

где через π_0 обозначена долгота перигелия вспомогательной орбиты, отсчитываемая, как и долгота w, от оси SX.

Положим, далее,

$$r = r_0(1+\nu). \tag{9.3}$$

Вычисление возмущенных координат w и r в методе Ганзена приводится, таким образом, к нахождению величин z и ν.

Чтобы получить дифференциальные уравнения, определяющие z и ν, введем в рассмотрение оскулирующие элементы a, e, n, p и χ. Через χ здесь обозначена долгота перигелия в момент t, отсчитываемая в плоскости оскулирующей орбиты от оси SX. Положив, далее,

$$h = k_1/\sqrt{p}; \quad h_0 = k_1/\sqrt{p_0},$$

из соотношений

$$r^2\frac{dw}{dt} = k_1\sqrt{p}; \quad r_0^2\frac{df_0}{dz} = k_1\sqrt{p_0},$$

получим

$$\frac{r^2}{r_0^2}\frac{dz}{dt} = \frac{\sqrt{p}}{\sqrt{p_0}} = \frac{h_0}{h},$$

так как $dw = df_0$ на основании (9.2).

Учитывая (9.3), имеем

$$\frac{dz}{dt}=\frac{h_0}{h(1+\nu)^2}. \tag{9.4}$$

С другой стороны,

$$\frac{1}{1+\nu}=\frac{r_0}{r}=\frac{r_0}{p}[1+e\cos(w-\chi)],$$

или

$$\frac{1}{1+\nu}=\frac{r_0}{p}[1+e\cos(f_0+\pi_0-\chi)].$$

Введем вспомогательные величины ξ и η, определяемые равенствами

$$\left.\begin{aligned} e\cos(\chi-\pi_0)&=(1-e_0^2)\xi+e_0,\\ e\sin(\chi-\pi_0)&=(1-e_0^2)\eta. \end{aligned}\right\} \tag{9.5}$$

Это позволит написать предыдущее выражение в следующем виде:

$$\frac{1}{1+\nu}=\frac{1}{p}\left[r_0(1+e_0\cos f_0)+(1-e_0^2)\xi r_0\cos f_0+(1-e_0^2)\eta r_0\sin f_0\right],$$

или

$$\frac{1}{1+\nu}=\frac{h^2}{h_0^2}\left(1+\xi\frac{r_0}{a_0}\cos f_0+\eta\frac{r_0}{a_0}\sin f_0\right). \tag{9.6}$$

Если соотношение (9.4) представить в форме

$$\frac{dz}{dt}=\frac{h_0}{h}\left(\frac{\nu}{1+\nu}\right)^2+\frac{2h_0}{h}\frac{1}{1+\nu}-\frac{h_0}{h}$$

и воспользоваться выражением (9.6), то получим

$$\frac{dz}{dt}=1+\frac{h_0}{h}\left(\frac{\nu}{1+\nu}\right)^2+\overline{W}, \tag{9.7}$$

где

$$\overline{W}=\frac{2h}{h_0}-\frac{h_0}{h}-1+\frac{2h}{h_0}\xi\frac{r_0}{a_0}\cos f_0+\frac{2h}{h_0}\eta\frac{r_0}{a_0}\sin f_0. \tag{9.8}$$

Исключение h_0/h из (9.4) и (9.7) дает

$$(1-\nu^2)\frac{dz}{dt}=1+\overline{W},$$

или

$$\frac{dz}{dt}=1+\frac{\overline{W}+\nu^2}{1-\nu^2}. \tag{9.9}$$

Выражению (9.8) Ганзен придает вид

$$\overline{W}=\Xi+\Upsilon\frac{r_0}{a_0}\cos f_0+\Psi\frac{r_0}{a_0}\sin f_0, \tag{9.10}$$

где

$$\Xi = \frac{2h}{h_0} - \frac{h_0}{h} - 1; \quad \Upsilon = \frac{2h}{h_0}\xi; \quad \Psi = \frac{2h}{h_0}\eta. \tag{9.11}$$

Уравнение (9.6) мало удобно для нахождения ν. Выгоднее пользоваться другим, дающим производную этой величины. Дифференцирование равенства (9.3) дает

$$\frac{d\nu}{dt} = \frac{1}{r_0}\frac{dr}{dt} - \frac{r}{r_0^2}\frac{dr_0}{dt},$$

или, учитывая (9.4),

$$\frac{d\nu}{dt} = \frac{1}{r_0}\frac{dr}{dt} - \frac{1}{r}\frac{h_0}{h}\frac{dr_0}{dz}.$$

Но, как мы знаем,

$$\frac{dr}{dt} = \frac{k_1}{\sqrt{p}} e \sin(\varpi - \chi) = he \sin(\varpi - \chi),$$

$$\frac{dr_0}{dz} = h_0 e_0 \sin f_0.$$

Следовательно,

$$\frac{d\nu}{dt} = \frac{1}{r_0} he \sin(\varpi - \chi) - \frac{1}{r}\frac{h_0^2}{h} e_0 \sin f_0.$$

Пользуясь выражением (9.1) для r_0 и аналогичным для r, это выражение можно заменить таким:

$$\frac{d\nu}{dt} = \frac{h}{p_0}\{e \sin(f_0 + \pi_0 - \chi)[1 + e_0 \cos f_0] - \\ - e_0 \sin f_0 [1 + e \cos(f_0 + \pi_0 - \chi)]\},$$

или, после упрощений,

$$\frac{d\nu}{dt} = \frac{h}{p_0}[e \sin(f_0 - \pi_0 - \chi) - e_0 \sin f_0 + ee_0 \sin(\pi_0 - \chi)].$$

Соотношения (9.5) позволяют написать

$$\frac{d\nu}{dt} = \frac{h}{a_0}[\xi \sin f_0 - \eta(e_0 + \cos f_0)], \tag{9.12}$$

или, пользуясь обозначениями (9.11),

$$\frac{d\nu}{dt} = \frac{n_0}{2\sqrt{1 - e_0^2}}[\Upsilon \sin f_0 - \Psi(e_0 + \cos f_0)]. \tag{9.13}$$

В заключение покажем, какой вид принимают эти выражения, если ограничиться членами первого порядка малости относительно возмущающего ускорения.

Уравнение (9.9) в этом случае принимает вид

$$\frac{dz}{dt} = 1 + \overline{W}_0, \tag{9.14}$$

причем

$$\overline{W}_0 = \Xi + \Upsilon \frac{r}{a} \cos f + \Psi \frac{r}{a} \sin f, \tag{9.15}$$

поскольку a, r и f отличаются от a_0, r_0 и f_0 на величины первого порядка.

Равенства (9.5) и (9.11) показывают, что ξ, η, Υ, Ψ суть величины первого порядка. Так как

$$\Xi = \frac{1}{hh_0}(h - h_0)(2h + h_0) = \frac{3}{h_0}(h - h_0) + \frac{1}{h_0^2}(h - h_0)^2 + \ldots,$$

то Ξ — такого же порядка.

С той же точностью формулы (9.6) и (9.11) дают

$$\nu = 1 - \frac{h^2}{h_0^2} - \frac{h}{2h_0}\left(\Upsilon \frac{r}{a} \cos f + \Psi \frac{r}{a} \sin f\right),$$

или

$$\nu = -2\frac{h - h_0}{h_0} - \frac{1}{2}\left(\Upsilon \frac{r}{a} \cos f + \Psi \frac{r}{a} \sin f\right),$$

а это выражение может быть заменено таким:

$$\nu = -\frac{2}{3}\Xi - \frac{1}{2}\left(\Upsilon \frac{r}{a} \cos f + \Psi \frac{r}{a} \sin f\right). \tag{9.16}$$

Итак, если пренебречь величинами второго порядка малости, то задача решается уравнениями (9.14) и (9.16).

§ 10. Метод Ганзена. Функция W

Уравнение (9.9) показывает, что

$$z = t + \int_0^t \frac{\overline{W} + \nu^2}{1 - \nu^2}\, dt. \tag{10.1}$$

Нахождение стоящей здесь функции $\overline{W}$ приводится, как сейчас увидим, к нахождению некоторой другой функции W. Ганзен показал, что через эту функцию может быть весьма просто выражена и величина ν, являющаяся другой главной неизвестной рассматриваемой нами задачи.

В функцию $\overline{W}$, определяемую равенством (9.10), время входит двояко: через посредство оскулирующих элементов, от которых зависят величины (9.11), и через посредство величин r_0, f_0, зависящих от z, которое является функцией времени. Чтобы сделать эту двоякую зависимость более явной, Ганзен обозна-