Уравнение (9.9) в этом случае принимает вид

$$\frac{dz}{dt}=1+\overline{W}_0, \tag{9.14}$$

причем

$$\overline{W}_0=\Xi+\Upsilon\frac{r}{a}\cos f+\Psi\frac{r}{a}\sin f, \tag{9.15}$$

поскольку a, r и f отличаются от a_0, r_0 и f_0 на величины первого порядка.

Равенства (9.5) и (9.11) показывают, что ξ, η, Υ, Ψ суть величины первого порядка. Так как

$$\Xi=\frac{1}{hh_0}(h-h_0)(2h+h_0)=\frac{3}{h_0}(h-h_0)+\frac{1}{h_0^2}(h-h_0)^2+\ldots,$$

то Ξ — такого же порядка.

С той же точностью формулы (9.6) и (9.11) дают

$$\nu=1-\frac{h^2}{h_0^2}-\frac{h}{2h_0}\left(\Upsilon\frac{r}{a}\cos f+\Psi\frac{r}{a}\sin f\right),$$

или

$$\nu=-2\frac{h-h_0}{h_0}-\frac{1}{2}\left(\Upsilon\frac{r}{a}\cos f+\Psi\frac{r}{a}\sin f\right),$$

а это выражение может быть заменено таким:

$$\nu=-\frac{2}{3}\Xi-\frac{1}{2}\left(\Upsilon\frac{r}{a}\cos f+\Psi\frac{r}{a}\sin f\right). \tag{9.16}$$

Итак, если пренебречь величинами второго порядка малости, то задача решается уравнениями (9.14) и (9.16).

§ 10. Метод Ганзена. Функция W

Уравнение (9.9) показывает, что

$$z=t+\int_0^t\frac{\overline{W}+\nu^2}{1-\nu^2}\,dt. \tag{10.1}$$

Нахождение стоящей здесь функции $\overline{W}$ приводится, как сейчас увидим, к нахождению некоторой другой функции W. Ганзен показал, что через эту функцию может быть весьма просто выражена и величина ν, являющаяся другой главной неизвестной рассматриваемой нами задачи.

В функцию $\overline{W}$, определяемую равенством (9.10), время входит двояко: через посредство оскулирующих элементов, от которых зависят величины (9.11), и через посредство величин r_0, f_0, зависящих от z, которое является функцией времени. Чтобы сделать эту двоякую зависимость более явной, Ганзен обозначает через t время, входящее в оскулирующие элементы, а через τ — время, функциями которого являются z, r_0, f_0.

Обозначив через ζ, ρ_0, ω_0, β величины z, r_0, f_0, ν, рассматриваемые как функции τ, положим

$$W = \Xi + \Upsilon \frac{\rho_0}{a_0}\cos\omega_0 + \Psi \frac{\rho_0}{a_0}\sin\omega_0. \tag{10.2}$$

При замене τ через t функция W обращается в $\overline{W}$.

Возьмем логарифмическую производную от обеих частей равенства

$$\frac{d\zeta}{d\tau} = \frac{h_0}{h(1+\beta)^2}, \tag{10.3}$$

аналогичного (9.4). Это даст

$$\frac{d^2\zeta/d\tau^2}{d\zeta/d\tau} = -\frac{2}{1+\beta}\frac{d\beta}{d\tau}. \tag{10.4}$$

С другой стороны, дифференцирование по τ равенства

$$\frac{d\zeta}{d\tau} = 1 + \frac{h_0}{h}\left(\frac{\beta}{1+\beta}\right)^2 + W,$$

аналогичного (9.7), дает

$$\frac{d^2\zeta}{d\tau^2} = 2\frac{h_0}{h}\frac{\beta}{(1+\beta)^3}\frac{d\beta}{d\tau} + \frac{dW}{d\zeta}\frac{d\zeta}{d\tau},$$

или, на основании соотношения (10.3),

$$\frac{d^2\zeta/d\tau^2}{d\zeta/d\tau} = \frac{2\beta}{1+\beta}\frac{d\beta}{d\tau} + \frac{dW}{d\zeta}.$$

Отсюда, учитывая (10.4), окончательно имеем

$$\frac{d\beta}{d\tau} = -\frac{1}{2}\frac{dW}{d\tau}.$$

В этом равенстве заменим τ через t. Результат этой замены в производной, стоящей справа, обозначим поставленной сверху черточкой. Это даст

$$\frac{d\nu}{dt} = -\frac{1}{2}\overline{\left(\frac{dW}{d\tau}\right)}.$$

Таким образом,

$$\nu = C - \frac{1}{2}\int_0^t \overline{\left(\frac{dW}{d\tau}\right)}\,dt. \tag{10.5}$$

Формулы (10.1) и (10.5) приводят решение задачи к нахождению функции W, определяемой равенством (10.2), или, что то же самое, к нахождению величин (9.11).

Первое из равенств (9.11) дает

$$\frac{d\Xi}{dt}=\left(\frac{2}{h_0}+\frac{h_0}{h^2}\right)\frac{dh}{dt},$$

откуда, учитывая (7.24), а также то, что в принятых здесь обозначениях Ганзена

$$r^2\frac{dw}{dt}=k_1\sqrt{p}=k_1^2h^{-1},$$

получим

$$\frac{d\Xi}{dt}=-\frac{h_0}{k_1^2}\left(1+\frac{2h^2}{h_0^2}\right)\frac{\partial R}{\partial w}. \tag{10.6}$$

Из соотношений (9.5) и (9.11) имеем

$$\Upsilon=\frac{2h}{h_0\left(1-e_0^2\right)}\left[e\cos(\chi-\pi_0)-e_0\right],$$

$$\Psi=\frac{2h}{h_0\left(1-e_0^2\right)}e\sin(\chi-\pi_0).$$

Отсюда, после дифференцирования этих выражений и использования уравнений Эйлера (§ 6 гл. XVI), получим

$$\left.\begin{aligned}\frac{d\Upsilon}{dt}&=\frac{2h}{k_1^2}\left[\left(\frac{a}{r}+\frac{1}{1-e^2}\right)\cos f+\frac{e}{1-e^2}\right]\frac{\partial R}{\partial w}+\frac{2ah}{k_1^2}\sin f\,\frac{\partial R}{\partial r},\\ \frac{d\Psi}{dt}&=\frac{2h}{k_1^2}\left(\frac{a}{r}+\frac{1}{1-e^2}\right)\sin f\,\frac{\partial R}{\partial w}-\frac{2ah}{k_1^2}\cos f\,\frac{\partial R}{\partial r}.\end{aligned}\right\} \tag{10.7}$$

Интегрирование уравнений (10.6) и (10.7), выполняемое, как всегда, последовательными приближениями, даст все более и более точные значения W, а следовательно, и полярных координат w и r.

§ 11. Метод Ганзена. Широта планеты

При нахождении эклиптических координат l и b точные формулы (8.7) почти всегда могут быть заменены более простыми:

$$\left.\begin{aligned}\cos b\sin(l-\Omega_0)&=\cos i_0\sin(w-\Omega_0)-s\operatorname{tg} i_0,\\ \cos b\cos(l-\Omega_0)&=\cos(w-\Omega_0),\\ \sin b&=\sin i_0\sin(w-\Omega_0)+s.\end{aligned}\right\} \tag{11.1}$$

Задача вычисления этих координат приводится, таким образом, к нахождению величины

$$s=M\sin(w-\Omega_0)-L\cos(w-\Omega_0),$$